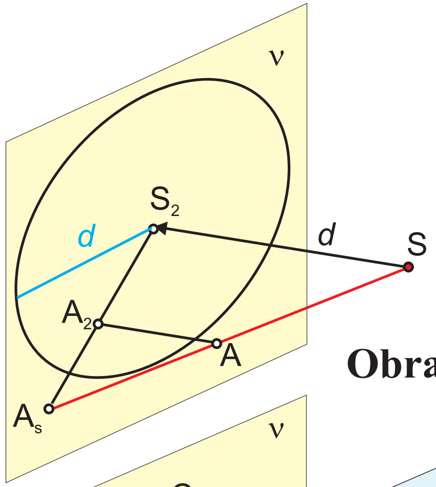
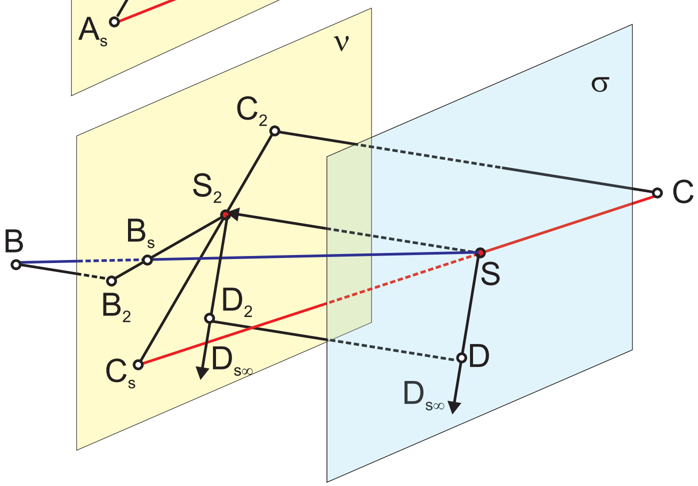
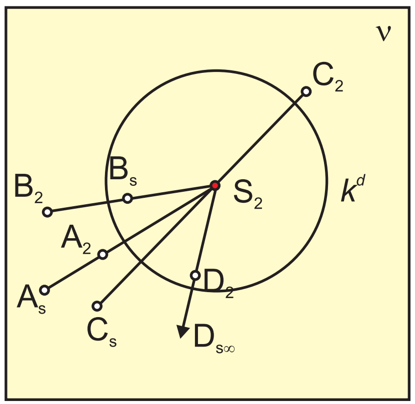
Středové promítání



ν ... průmětna
S ... střed promítání
S_2 ... hlavní bod
d ... distance
σ ... středová (distanční) rovina
k^d ... distanční kružnice (S_2, d)

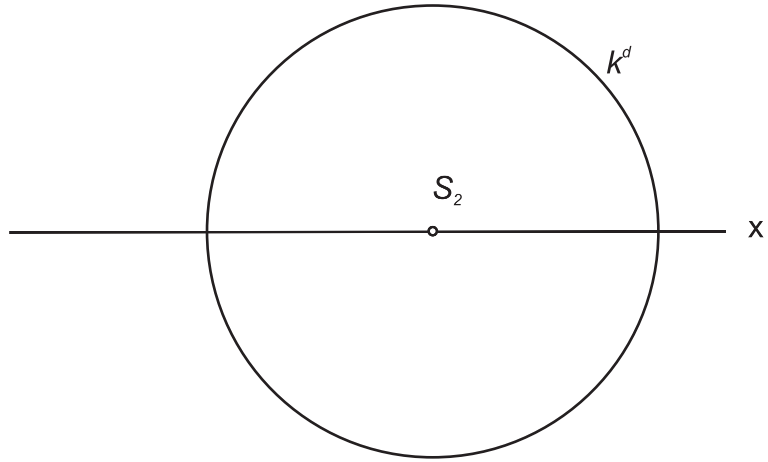
Obraz bodu



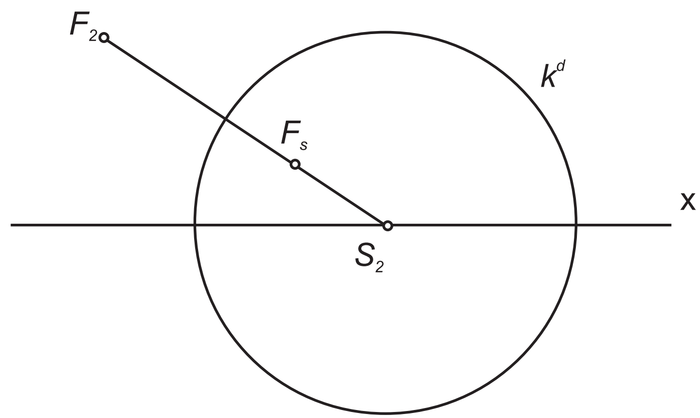


Spojnice středového průmětu bodu a pravoúhlého průmětu bodu do průmětny prochází hlavním bodem.

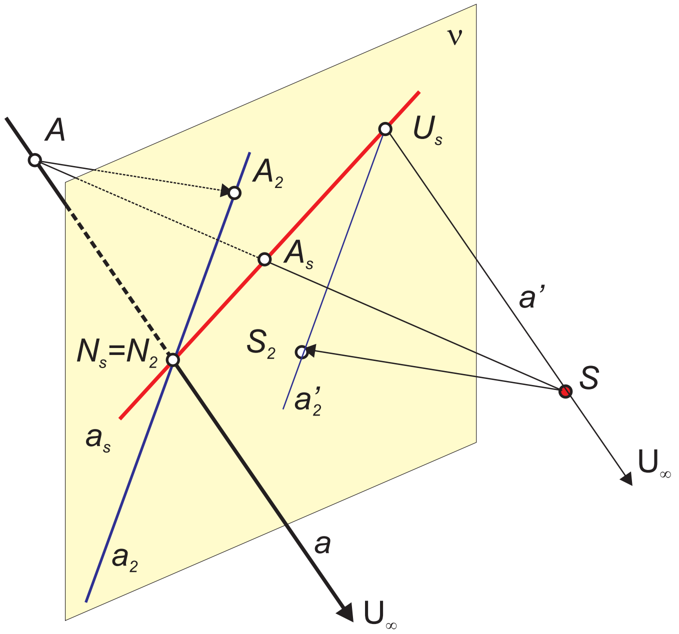
Příklad 1: Sestrojte středový průmět bodů $X[-5; 1; 2]$ a $Y[3; -1; 4]$, střed promítání má souřadnice $S[0; 3; 0]$.



Příklad 2: Určete (graficky) souřadnice bodu F.



Obraz přímky



Středovým průmětem přímky, která neprochází středem promítání je opět přímka.

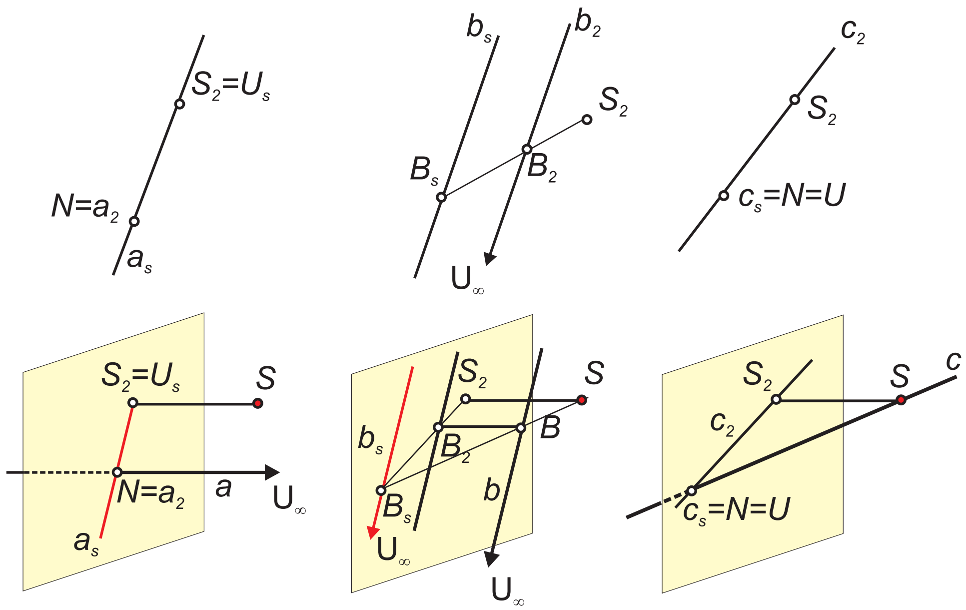
N_s ... stopník přímky
U_s ... úběžník (středový průmět nevlastního bodu přímky)

Středový průmět přímky je určen dvěma body (obvykle stopníkem a úběžníkem).

Spojnice úběžníku s hlavním bodem je rovnoběžná s nárysem přímky.

$A \in a \Rightarrow A_s \in a_s$
ale z $A_s \in a_s$ nemusí platit $A \in a$

Poloha přímky vzhledem k průmětně a středu promítání.

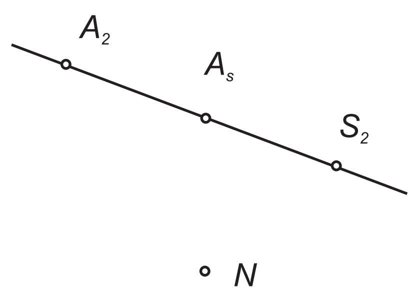


přímka kolmá k průmětně

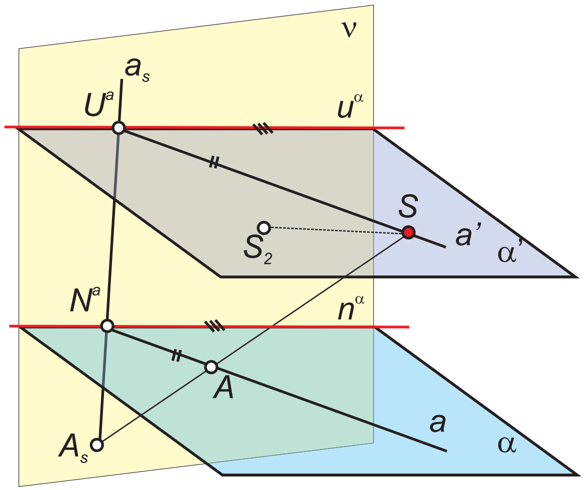
přímka rovnoběžná s průmětnou

přímka procházející středem promítání

Příklad 3: Sestrojte středový průmět a pravoúhlý průmět přímky a a její úběžník U, jeli určena stopníkem a bodem A.



Obraz roviny



n^α ... stopa roviny
u^α ... úběžnice (středový průmět nevlastní přímky roviny)
α' ... úběžnicová rovina (rovnoběžná s rovinou α a procházející středem S)

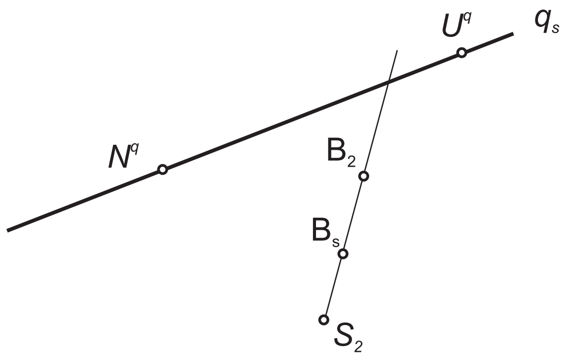
Stopa a úběžnice roviny jsou vždy rovnoběžné nebo splývají.

Rovina je určena stopou a úběžnicí (průměty dvou přímek).

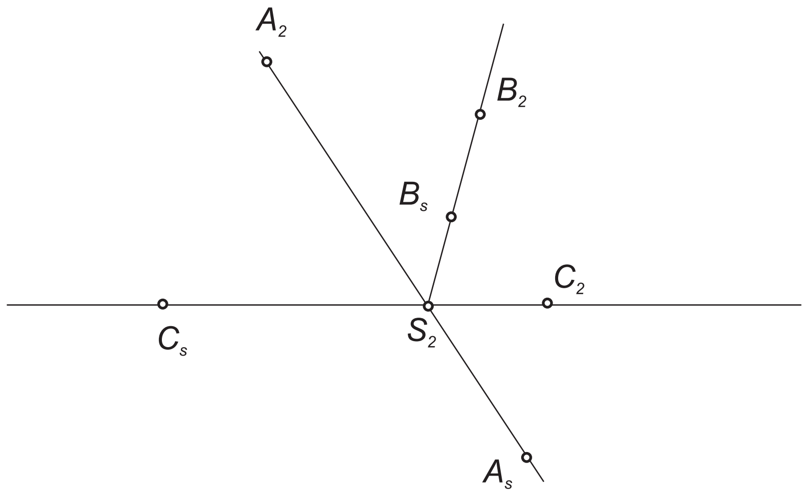
Přímka leží v rovině právě když její stopník leží na stopě roviny a úběžník na úběžnici roviny.

Rovina rovnoběžná s průmětnou má úběžnici (i stopu) v nevlastní přímce roviny.

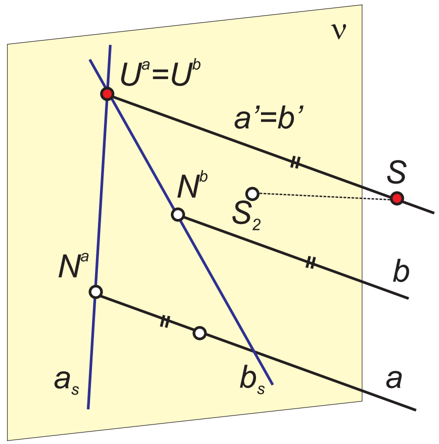
Příklad 4: Sestrojte stopu a úběžnici roviny β určené přímkou q a bodem B.



Příklad 5: Sestrojte stopu a úběžnici roviny γ určené body A, B, C.

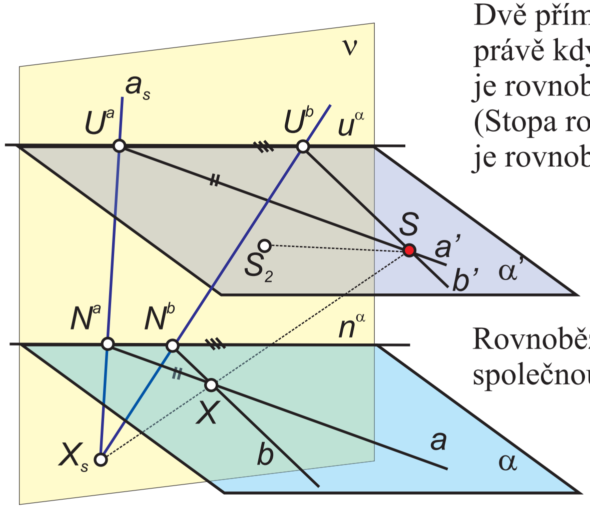


Polohové úlohy



Rovnoběžné přímky mají společný úběžník.

Přímka je rovnoběžná s rovinou, právě když úběžník přímky leží na úběžnici roviny.

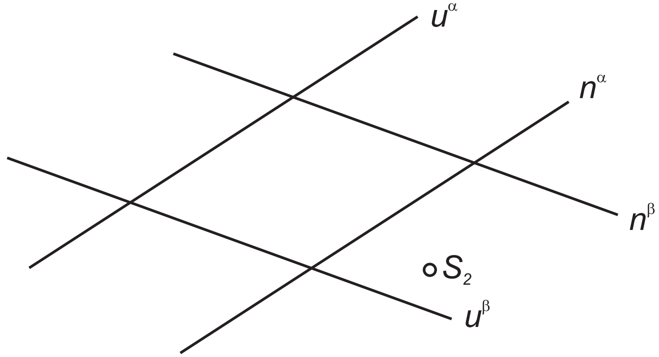


Dvě přímky jsou různoběžné, právě když spojnice stopníků je rovnoběžná se spojnicí úběžníků. (Stopa roviny určená různoběžkami je rovnoběžná s úběžnicí této roviny.)

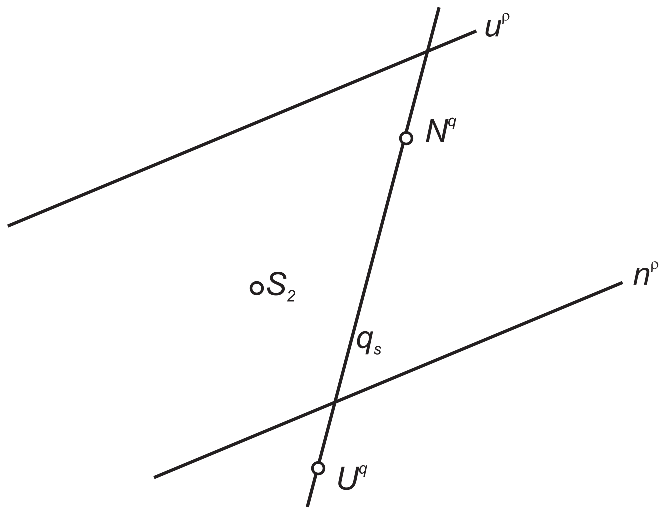
Rovnoběžné roviny mají společnou úběžnici.

Průsečnice rovin má stopník v průsečíku stop a úběžník v průsečíku úběžnic.

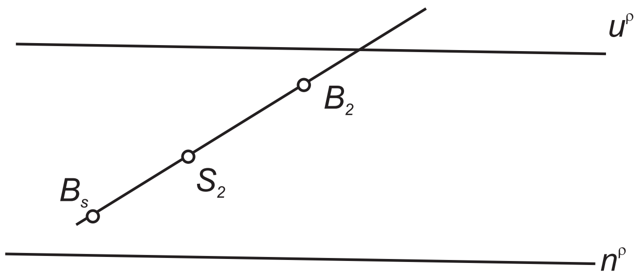
Příklad 6: Ve středovém promítání se středem S sestrojte průsečnici rovin $\alpha(n^\alpha, u^\alpha)$ a $\beta(n^\beta, u^\beta)$.



Příklad 7: Sestrojte průsečík přímky $q(U^q, N^q)$ s rovinou $\rho(u^\rho, n^\rho)$.

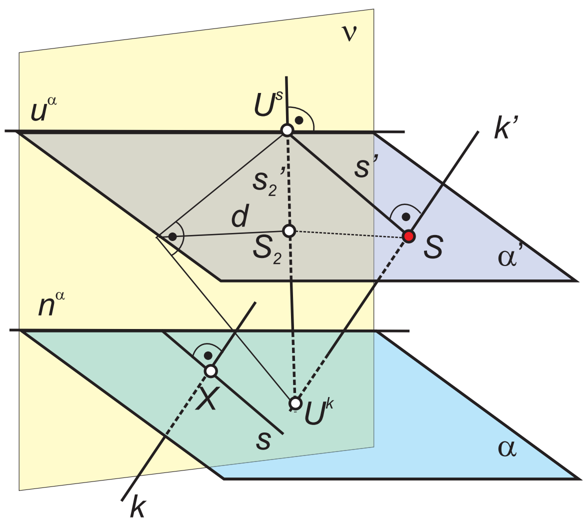


Příklad 8: Bodem B veďte rovinu $\sigma(u^\sigma, n^\sigma)$ rovnoběžnou s rovinou $\rho(u^\rho, n^\rho)$.

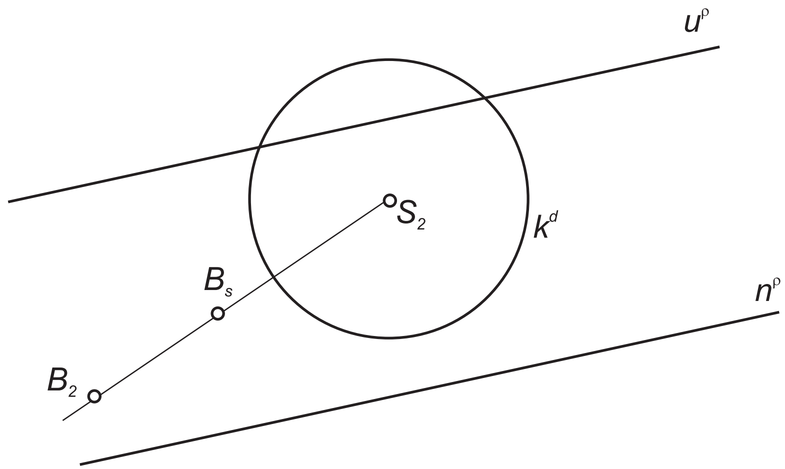


Metrické úlohy

Přímka kolmá k rovině

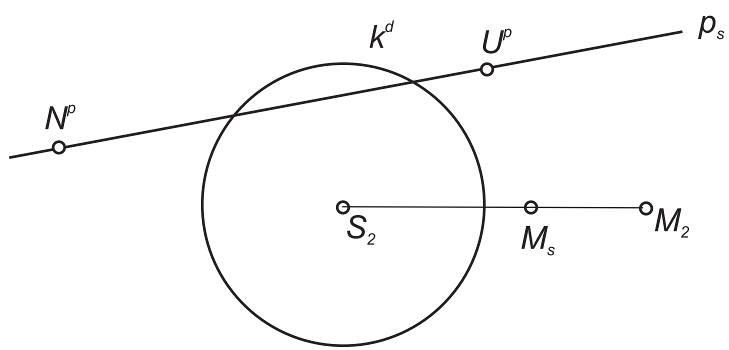


Příklad 9: Ve středovém promítání se středem S sestrojte kolmici bodem B k rovině $\rho(u^\rho, n^\rho)$.

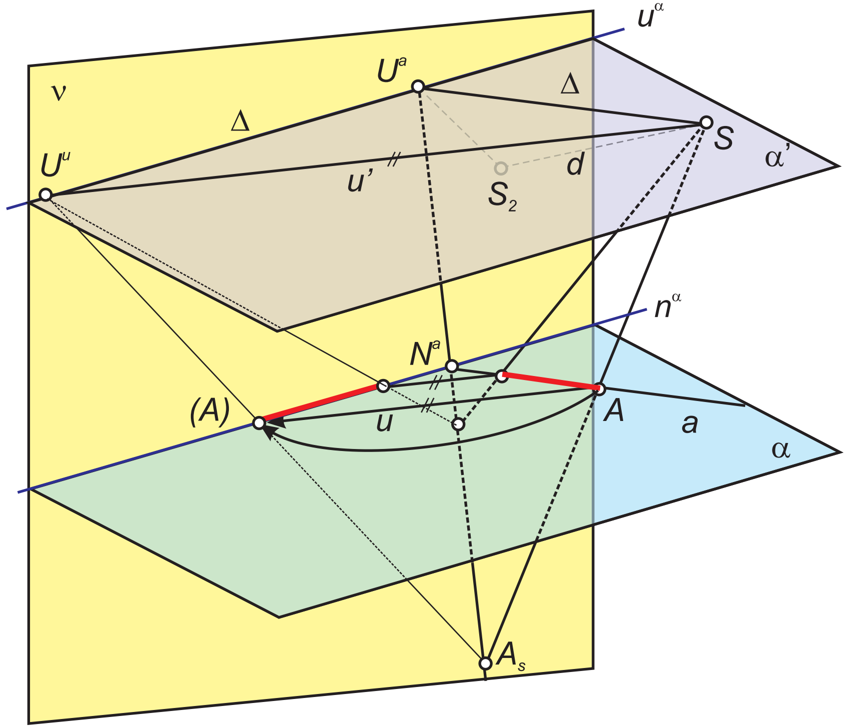


Rovina kolmá k přímce

Příklad 10: Ve středovém promítání se středem S sestrojte bodem M rovinu kolmou k přímce p.

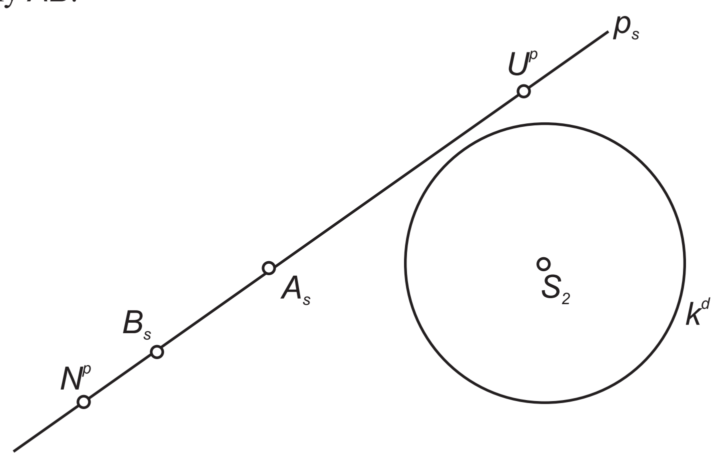


Skutečná délka úsečky

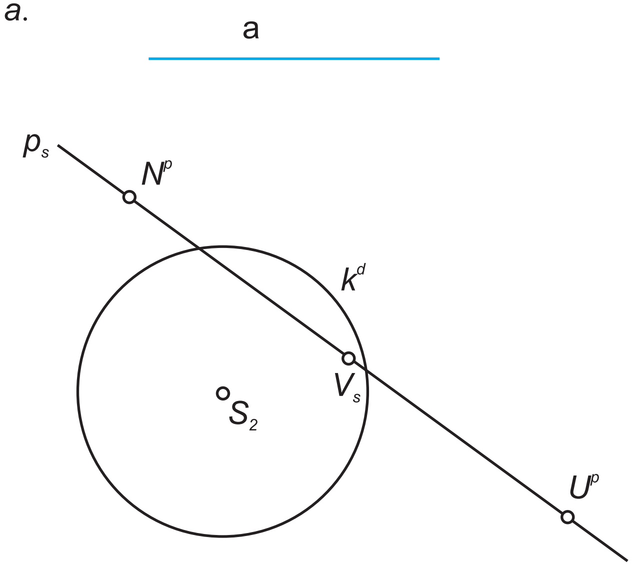


- Přímkou proložíme libovolnou rovinu α.
- Úsečku otočíme do stopy roviny α.
- Otočení odpovídá rovnoběžnému promítnutí, proto najdeme úběžník promítacího paprsku u.
- Použitím úběžníku sestrojíme středový průmět promítacího paprsku A_sU^u, na kterém leží bod *(A)*, tj. otočený bod *A* do stopy.

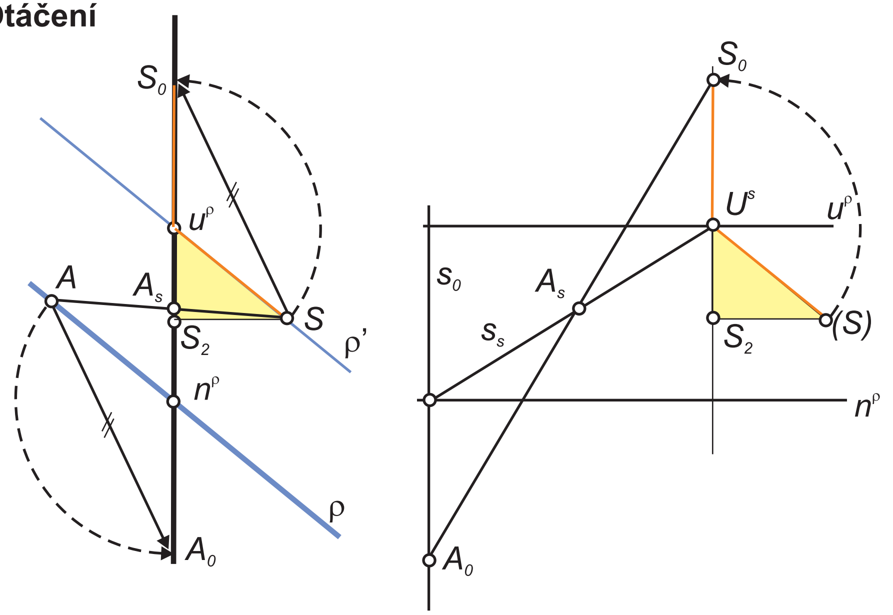
Příklad 11: Ve středovém promítání se středem *S* určete skutečnou délku úsečky *AB*.



Příklad 12: Ve středovém promítání se středem *S* naneste na přímku *p* od bodu *V* délku *a*.



Otáčení

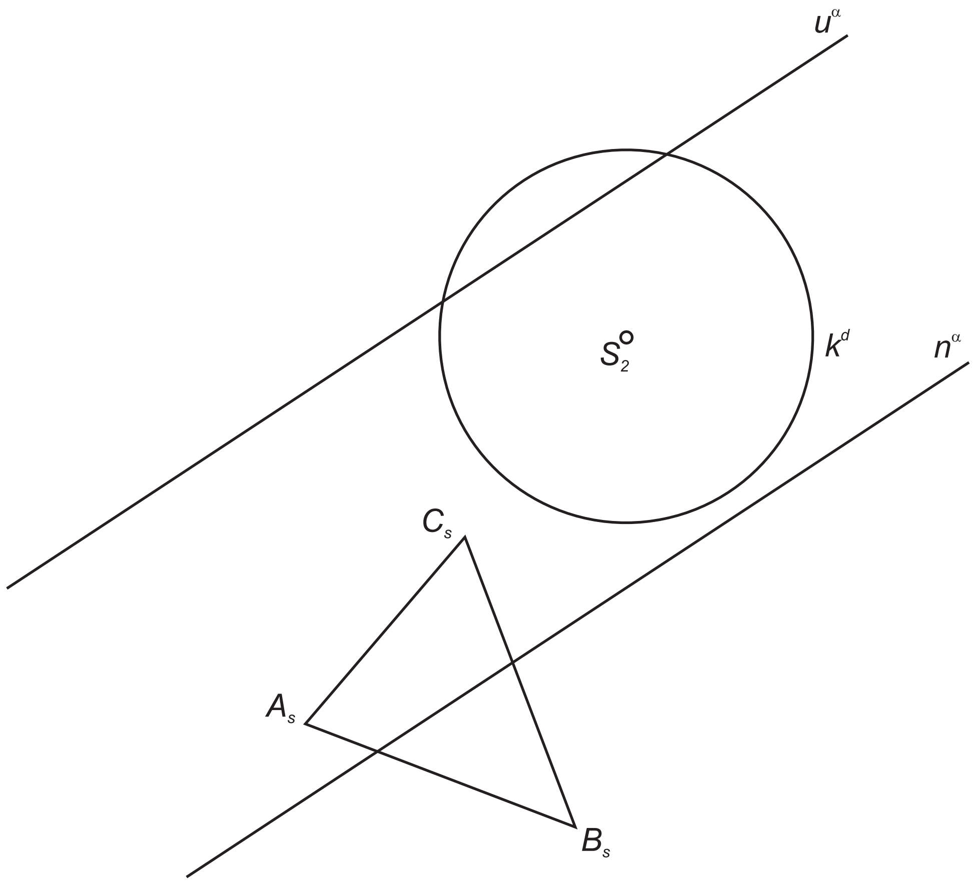


- Otočíme rovinu ρ kolem stopy do průmětny.
- Zároveň otočíme úběžnicovou rovinu kolem úběžnice do průmětny.
- Otočení můžeme nahradit rovnoběžným promítnutím (bodu S a bodů roviny ρ).

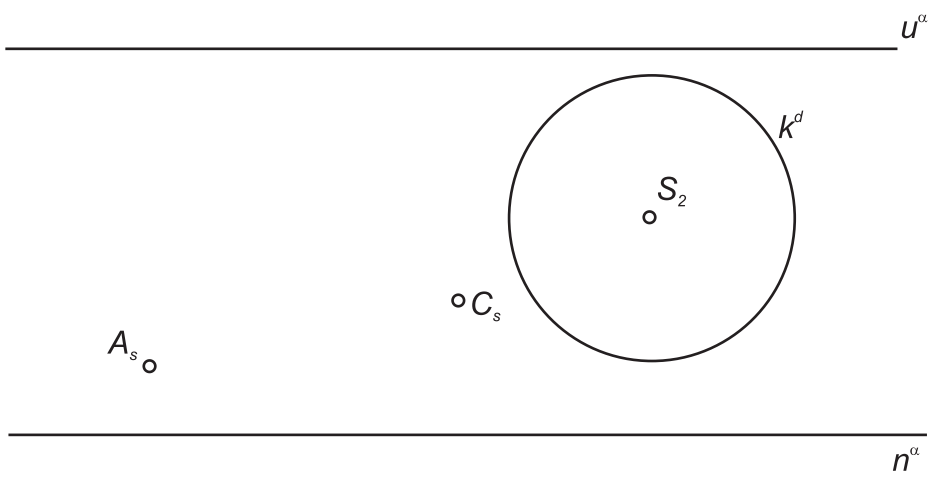
- Otočíme bod S (v úběžnicové rovině kolem úběžnice), rovina otáčení je kolmá k úběžnici, střed otáčení je úběžník spádových přímek a poloměr otáčení je přepona pravoúhlého trojúhelníka jehož odvěsnami jsou S_2U^s a $S_2(S)$ ((S) je sklopený bod S).
- Otočený bod A (A_0) nalezneme takto: Bodem A vedeme spádovou přímku (prochází A_s a U^s), její stopník leží na stopě roviny, otočená spádová přímka prochází stopníkem a je kolmá ke stopě. Bod A_0 leží na otočené spádové přímce a na přímce procházející bodem S_0 (otočený bod S) a bodem A_s.

Mezi středovým průmětem a otočeným objektem platí vztah kolineace jejíž osou je stopa roviny, středem je otočený střed S_0 a párem odpovídajících si bodů body A_s a A_0.

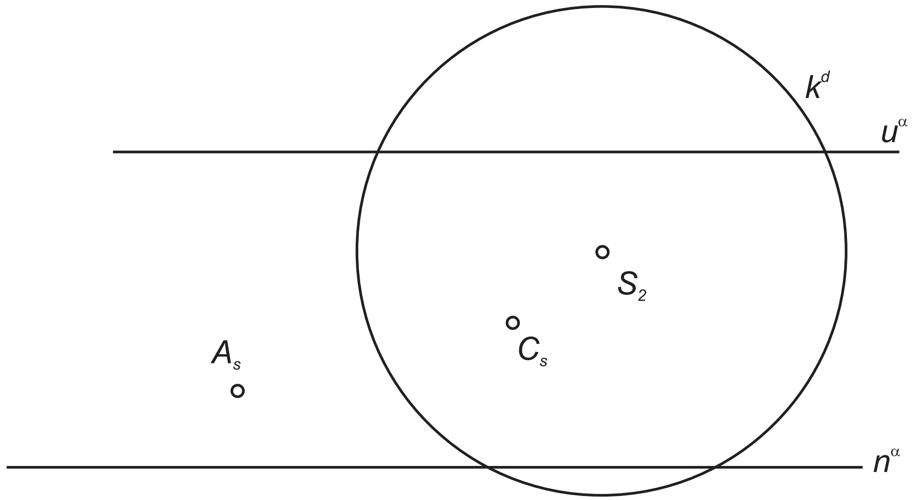
Příklad 13: Ve středovém promítání se středem S určete skutečnou velikost trojúhelníka ABC.



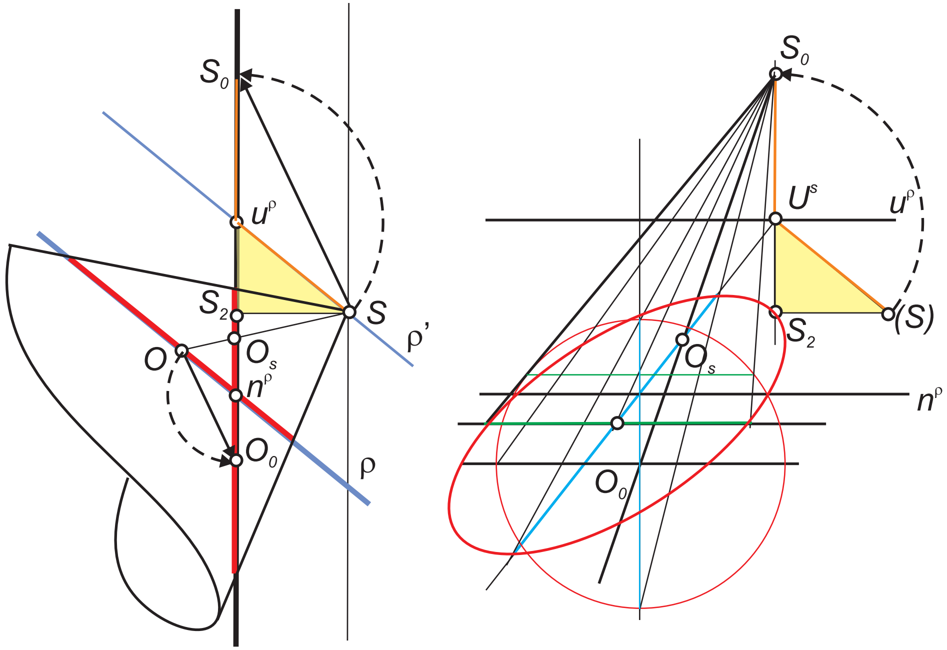
Příklad 14: Ve středovém promítání se středem S sestrojte čtverec $ABCD$, ležící v rovině α jestliže znáte středový průmět úhlopříčky AC.



Příklad 15: Ve středovém promítání se středem S sestrojte krychli s podstavou v rovině α a na ní umístěte pravidelný čtyřboký jehlan tak, aby vrcholy podstavy splývaly s vrcholy horní podstavy krychle. Znáte středový průmět úhlopříčky AC, výška jehlanu je shodná se stranou krychle.



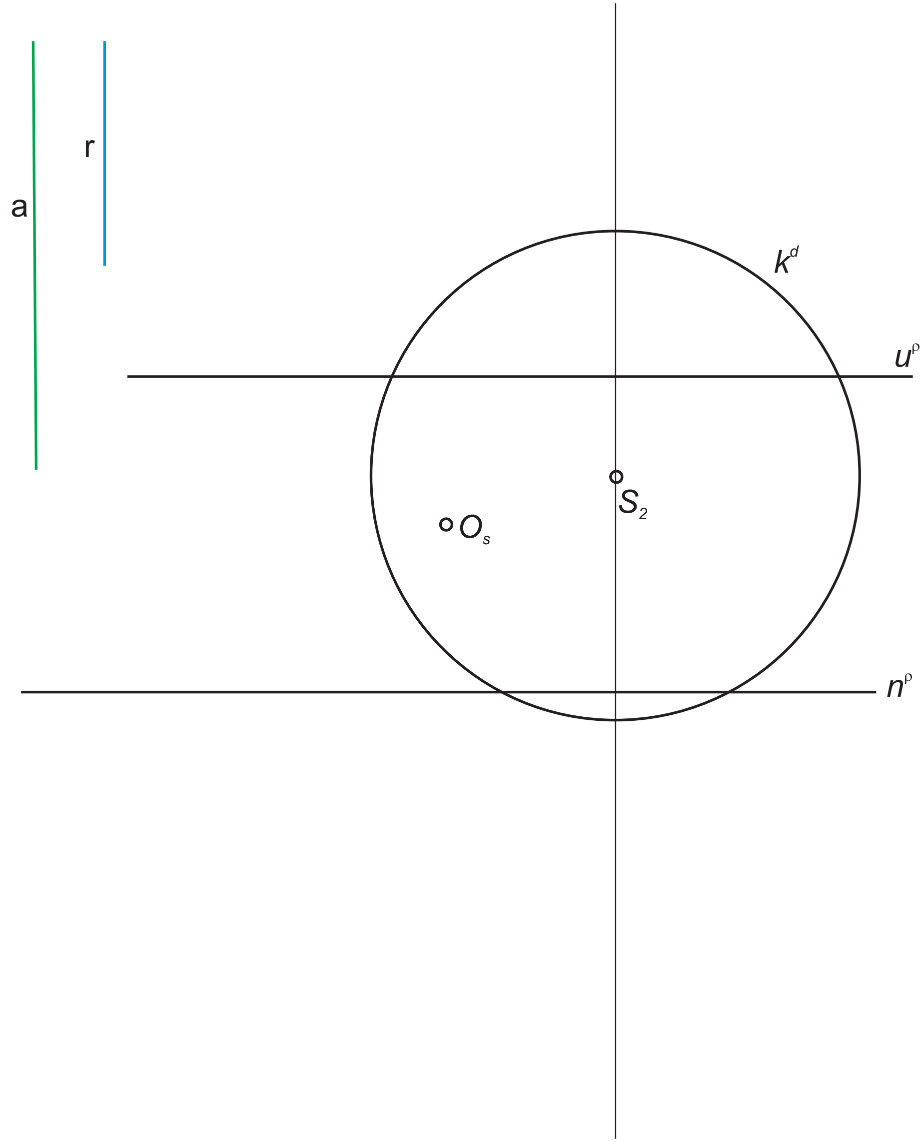
Obraz kružnice



Středovým průmětem kružnice je kuželosečka, v níž průmětna protíná promítací kuželovou plochu kružnice.
Typ kuželosečky závisí na poloze kružnice k distanční rovině:

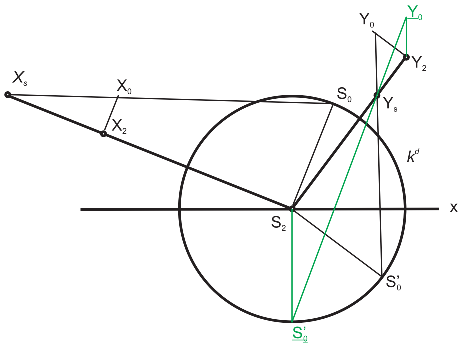
kružnice neprotíná distanční rovinu (nemá s ní žádný společný bod) ... **elipsa**
kružnice protíná distanční rovinu ... **hyperbola**
kružnice se dotýká distanční roviny ... **parabola**

Příklad 16: Ve středovém promítání se středem *S* sestrojte rotační kužel s podstavou v rovině ρ. Je dán střed podstavy *O* v rovině ρ, poloměr podstavy je *r* a výška kužele *a*.

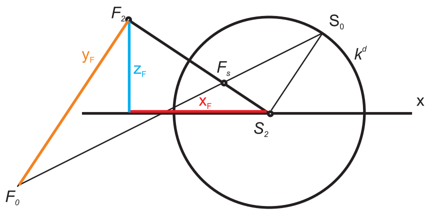


Řešení úloh

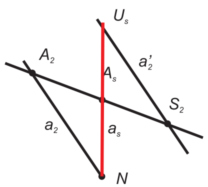
Příklad 1:



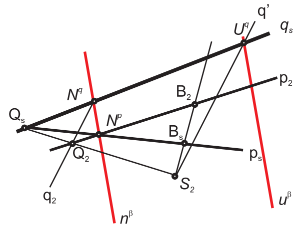
Příklad 2:



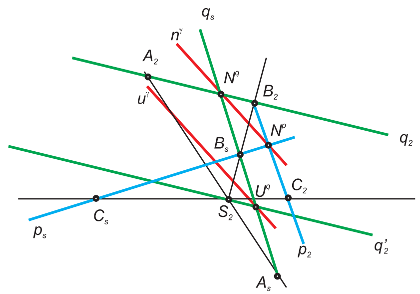
Příklad 3:



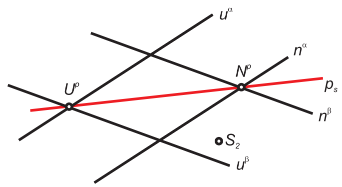
Příklad 4:



Příklad 5:

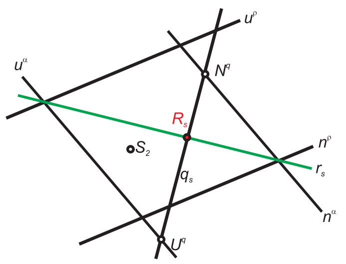


Příklad 6:

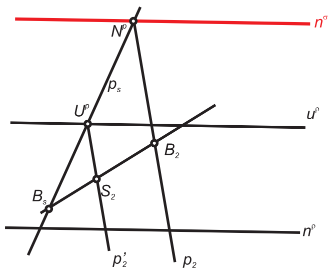


Řešení úloh

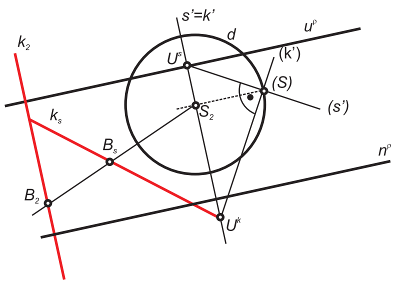
Příklad 7:



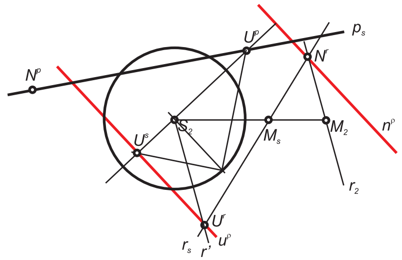
Příklad 8:



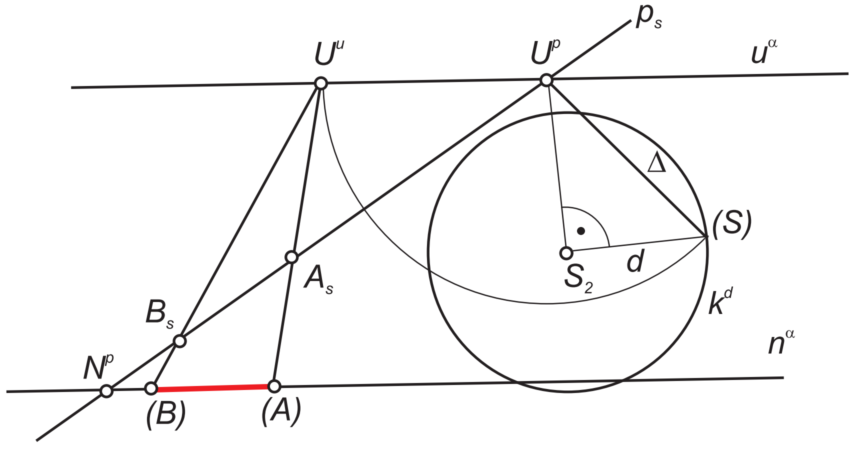
Příklad 9:



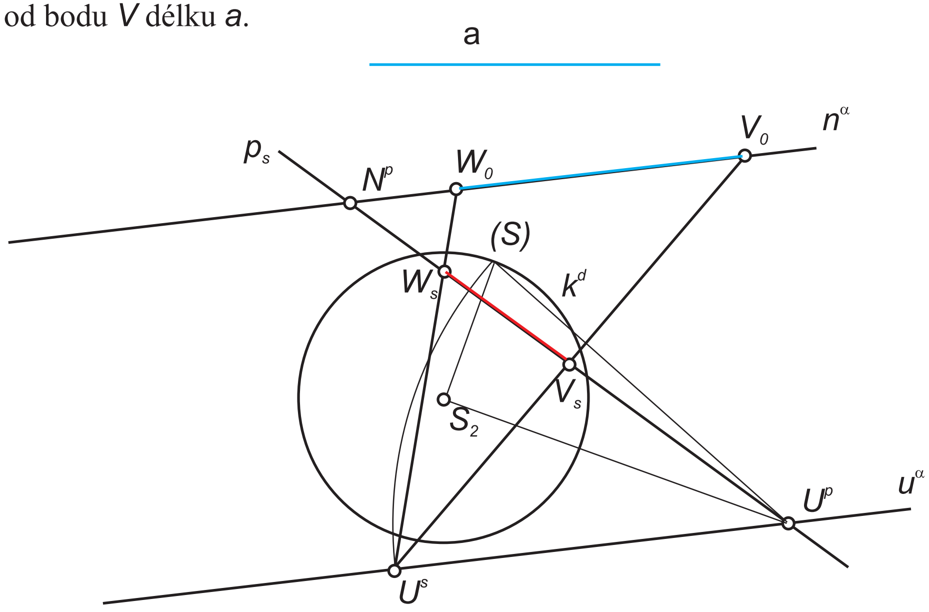
Příklad 10:



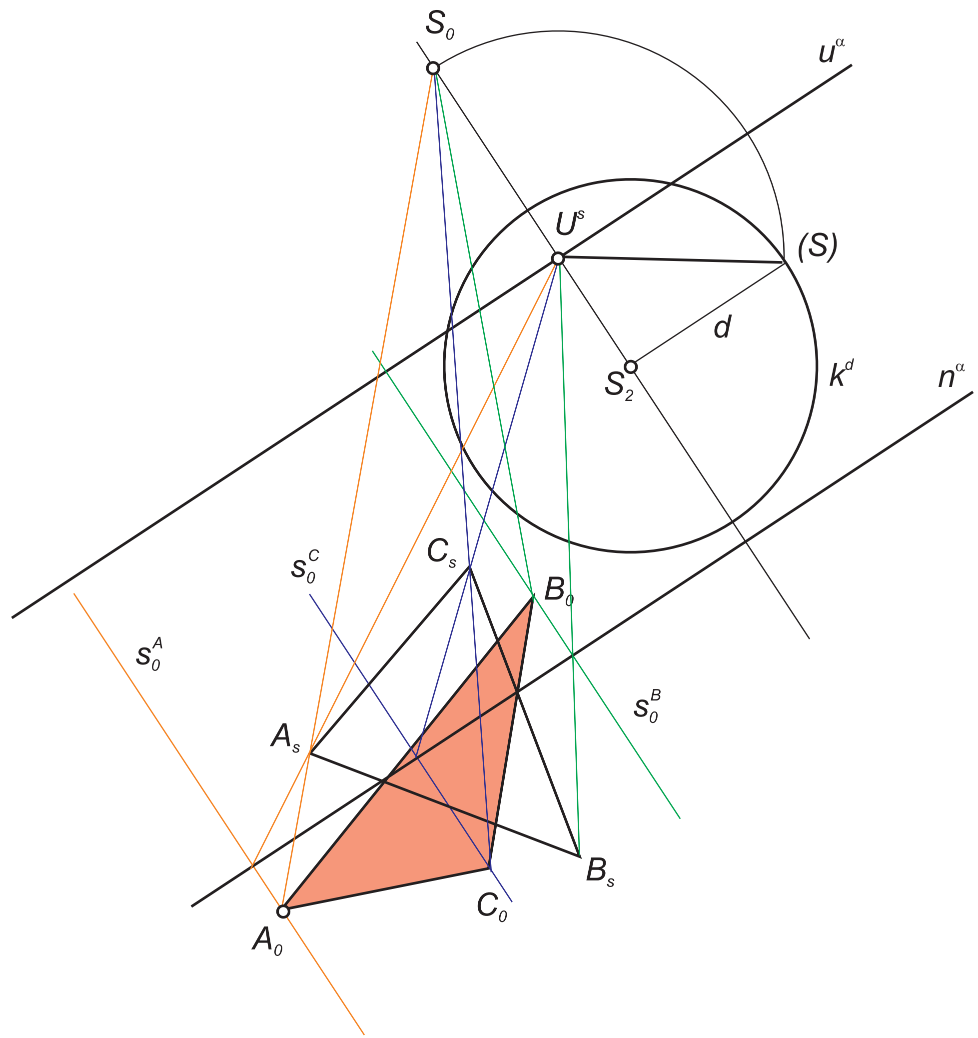
Příklad 11: Ve středovém promítání se středem S určete skutečnou délku úsečky AB.



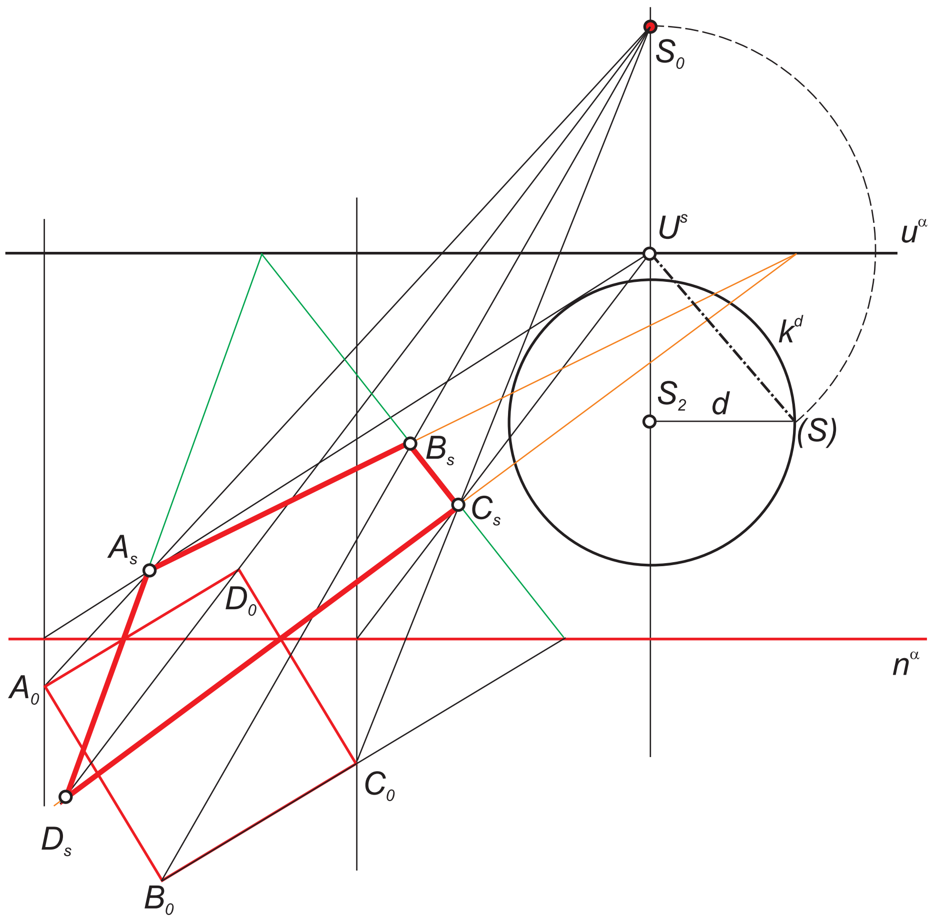
Příklad 12: Ve středovém promítání se středem S naneste na přímku p od bodu V délku a.



Příklad 13: Ve středovém promítání se středem S určete skutečnou velikost trojúhelníka ABC.



Příklad 14: Ve středovém promítání se středem S sestrojte čtverec $ABCD$, ležící v rovině α jestliže znáte středový průmět úhlopříčky AC.



Příklad 16: Ve středovém promítání se středem S sestrojte rotační kužel s podstavou v rovině ρ. Je dán střed podstavy O v rovině ρ, poloměr podstavy je r a výška kužele a.