Západočeská univerzita v Plzni
Fakulta aplikovaných věd
Katedra matematiky

Deskriptivní geometrie 2

Pomocný učební text - díl II

Světlana Tomiczková

Plzeň – 4. května 2011 – verze 1.0

Obsah

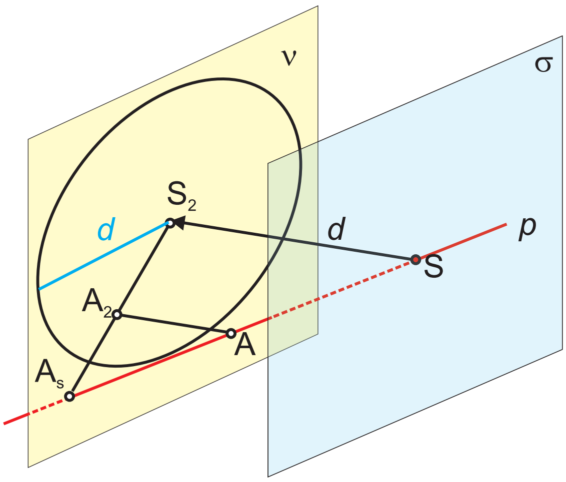
Kapitola 1

Středové promítání

1.1 Základní pojmy

V prostoru zvolíme rovinu ν, na kterou budeme promítat - říkáme jí **průmětna** a vlastní bod S, který neleží v rovině ν, nazýváme ho **střed promítání**, jeho pravoúhlý průmět do průmětny je hlavní bod (průmětnu jsme zde ztotožnili s nárysnou proto pravoúhlý průmět značíme S_2).

Vzdálenost středu promítání od průmětny nazýváme distance a značíme d, rovinu procházející středem promítání a rovnoběžnou s průmětnou nazýváme **středová** nebo **distanční rovina**. Ke konstrukcím často používáme tzv. distanční kružnici $k^d(S_2, d)$, která leží v průmětně ν.

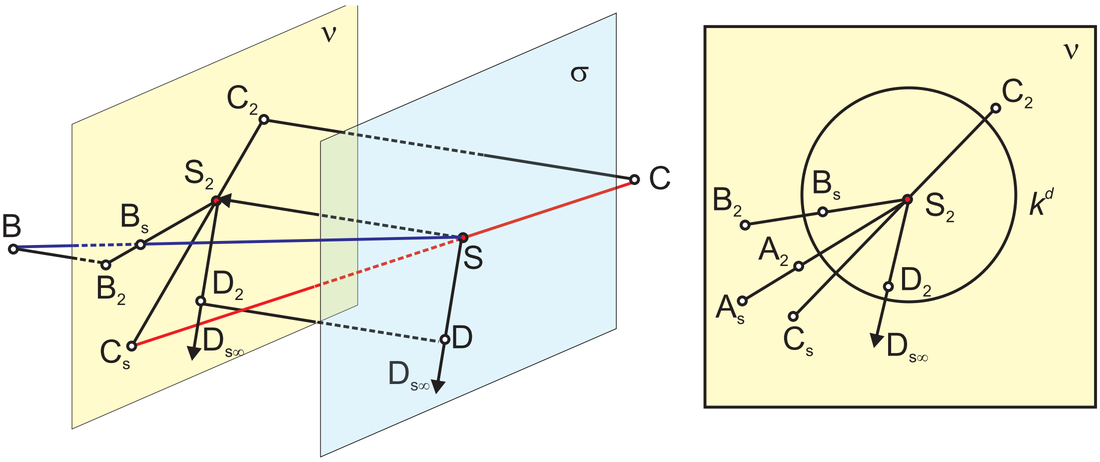


Obrázek 1.1:

1.1.1 Obraz bodu

Libovolný bod A promítneme (zobrazíme) do roviny ν následujícím způsobem (viz obr. 1.1): Body S a A vedeme přímku p. Přímka p se nazývá **promítací přímka**. Průsečík A_s přímky p s rovinou ν je středovým průmětem bodu A do roviny ν.

Svým středovým průmětem není bod A v prostoru jednoznačně určen. Jako pomocný průmět používáme pravoúhlý průmět A_2 bodu A do průmětny ν neboli nárys tohoto bodu. Na obrázku 1.2 je vidět polohu bodů B, C, D vůči průmětně a distanční rovině, jejich středové průměty a pravoúhlé průmětu do roviny ν. Všimněte si, že **spojnice středového průmětu bodu a pravoúhlého průmětu bodu do průmětny prochází hlavním bodem.**



Obrázek 1.2:

Příklad 1.1 Sestrojte středový průmět bodů $X[-5;1;2]$ a $Y[3;-1;4]$, střed promítání má souřadnice $S[0;3;0]$. - obr. 1.3.

Řešení: (obr. 1.4)

1. Sestrojíme nárys X_2 bodu X (použijeme první a třetí souřadnici, protože průmětnou je rovina xz (tedy nárysna).
2. Sklopíme promítací rovinu bodu X do průmětny - body X_2 a S_2 vedeme kolmice ke spojnici X_2X_2 a naneseme na ně druhé souřadnice bodů X a S, získané body označíme X_0, S_0 (body X_0, S_0 jsou sklopeny v jedné polorovině ohraničené přímkou X_2S_2, protože y-ové souřadnice bodů X a S mají stejné znaménko).
3. Spojnice bodů X_0, S_0 protíná přímku X_2S_2 v bodě X_S - středovém průmětu bodu X.
4. Bod Y_S získáme podobným způsobem, ale body Y_0', S_0' jsou sklopeny v opačných polorovinách ohraničené přímkou Y_2S_2, protože y-ové souřadnice bodů Y a S mají opačné znaménko).
5. Zeleně je naznačena jiná konstrukce bodu Y_S.

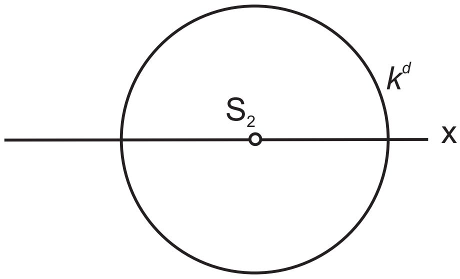
□

Příklad 1.2 Určete (graficky) souřadnice x_F, y_F, z_F bodu F, střed promítání má souřadnice $S[0;3;0]$. - obr. 1.5.

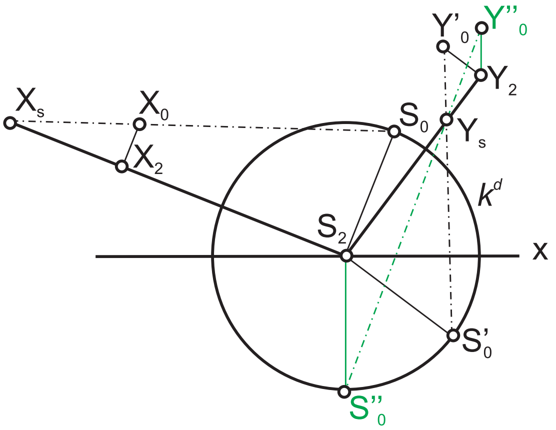
Řešení: (obr. 1.6)

1. Souřadnice x_F a z_F odečteme rovnou z nárysu F_2 bodu F.
2. Souřadnici y_F získáme sklopením promítací roviny bodu F.

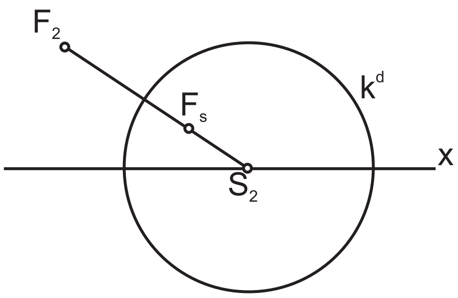
□



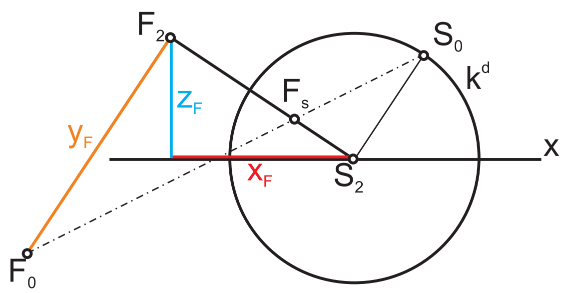
Obrázek 1.3:



Obrázek 1.4:



Obrázek 1.5:



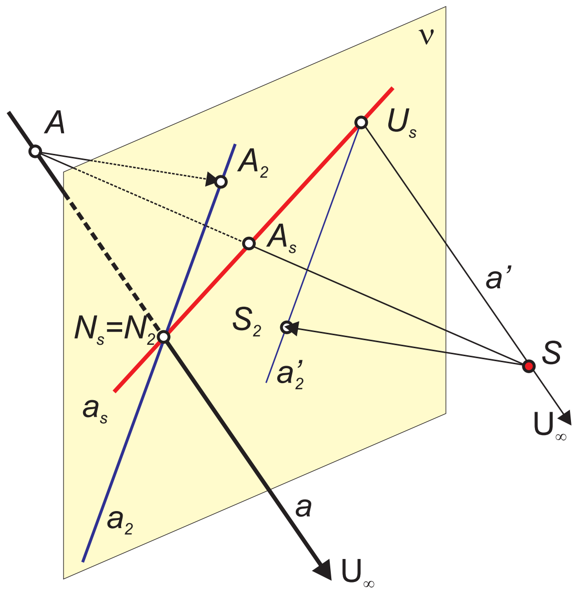
Obrázek 1.6:

1.1.2 Obraz přímky

Středovým průmětem přímky, která neprochází středem promítání je opět přímka - obr. 1.7. Středový průmět přímky je určen středovými průměty dvou bodů (často používáme stopník a úběžník).

Stopník N_s přímky a je průsečík přímky a s průmětnou ν (platí $N_s = N_2^a$). **Úběžník** U_s přímky a je středový průmět nevlastního bodu přímky a (U_s je průsečík přímky a' procházející středem S a rovnoběžné s přímkou a s průmětnou ν). Spojnice a_2' úběžníku U_s s hlavním bodem S_2 je rovnoběžná s nárysem a_2 přímky a. Stopník a úběžník budeme označovat bez dolního indexu tedy $N(U)$ popř. $N^a(U^a)$, pokud bude nutné rozlišit stopníky popř. úběžníky několika přímek.

Na obrázku 1.8 vidíte speciální polohy přímky vzhledem k průmětně a ke středu promítání. Zleva doprava je na obrázku přímka kolmá k průmětně, přímka rovnoběžná s průmětnou a přímka procházející středem promítání. V horní řadě je situace v průmětně, ve druhé řadě prostorový náčrtek.



Obrázek 1.7:

Příklad 1.3 Sestrojte středový průmět a pravoúhlý průmět přímky a a její úběžník U, jeli určena stopníkem N a bodem A. - obr. 1.9.

Řešení: (obr. 1.10)

1. Spojnice A_2N je nárysem a_2 přímky a.
2. Přímka a' prochází bodem S_2 a platí $a' \parallel a_2$.
3. Spojnice A_sN je středovým průmětem a_s přímky a.
4. Úběžník U přímky a leží v průsečíku přímek a_s a a'.

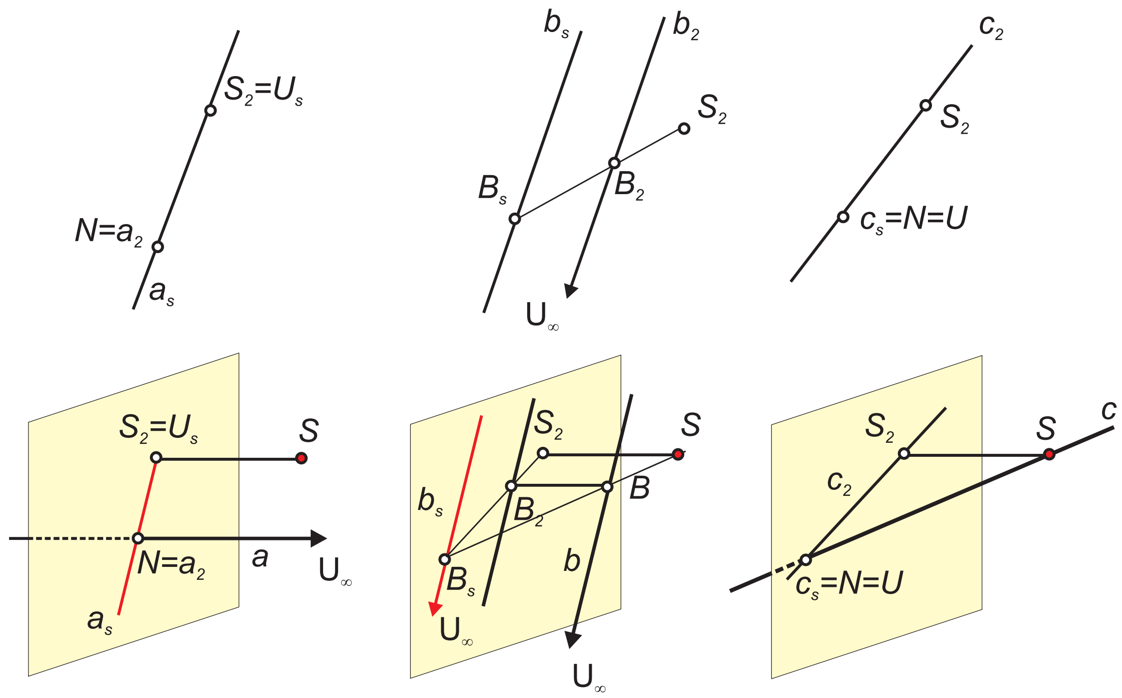
□

1.1.3 Obraz roviny

Stopa n^α roviny α je průsečnice roviny α s průmětnou. Středový průmět nevlastní přímky roviny se nazývá **úběžnice** a značíme ji u^α. Rovinu α', která je rovnoběžná s rovinou α a prochází středem S nazýváme **úběžnicová rovina** , tato rovina protíná průmětnu v úběžnici u^α.

Stopa a úběžnice roviny jsou vždy rovnoběžné nebo splývají. Rovina je určena stopou a úběžnicí (průměty dvou přímek). Přímka leží v rovině právě když její stopník leží na stopě roviny a úběžník na úběžnici roviny. Rovina rovnoběžná s průmětnou má úběžnici (i stopu) v nevlastní přímce roviny.

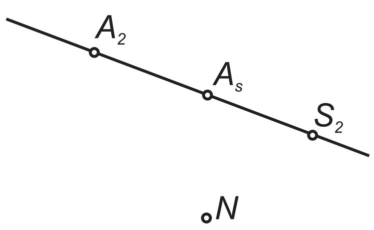
Příklad 1.4 Sestrojte stopu a úběžnici roviny β určené přímkou $q = N^qU^q$ a bodem B. - obr. 1.12.



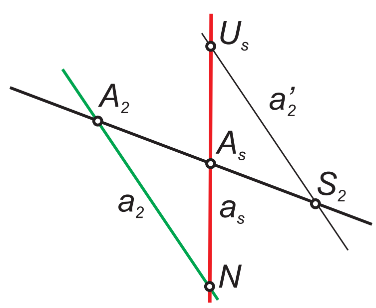
Obrázek 1.8:

Řešení: (obr. 1.13) Stopník přímky ležící v rovině leží na stopě roviny, úběžník přímky ležící v rovině leží na její úběžnici.

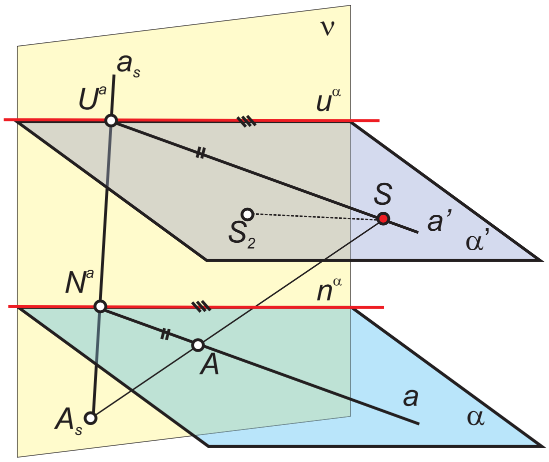
1. Určíme další přímku p roviny β:
   (a) Na přímce q zvolíme bod Q, platí $Q_s \in q_s$.
   (b) Sestrojíme $q_2' = S_2U^q$ a q_2 ($q_2 \parallel q_2'$ a $N_2 \in q_2$).
   (c) Určíme nárys Q_2 bodu Q ($Q_2 = Q_sS_2 \cap q_2$).
   (d) Přímka p je určena body Q a B ($p_s = Q_sB_s$, $p_2 = Q_2B_2$).
2. Sestrojíme stopník N^p přímky p ($N^p = p_s \cap p_2$).



Obrázek 1.9:

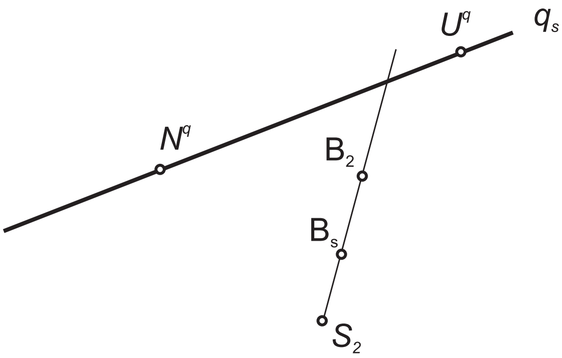


Obrázek 1.10:

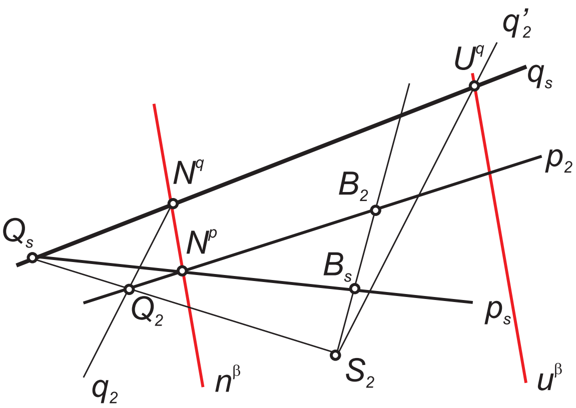


Obrázek 1.11:

3. Stopa n^β roviny β je spojnicí stopníků N^p a N^q.
4. Úběžnice u^β roviny β prochází úběžníkem U^q a je rovnoběžná se stopou n^β roviny β. (Nemusíme tedy sestrojovat druhý úběžník).



Obrázek 1.12:



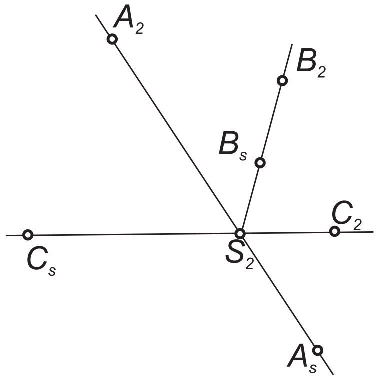
Obrázek 1.13:

□

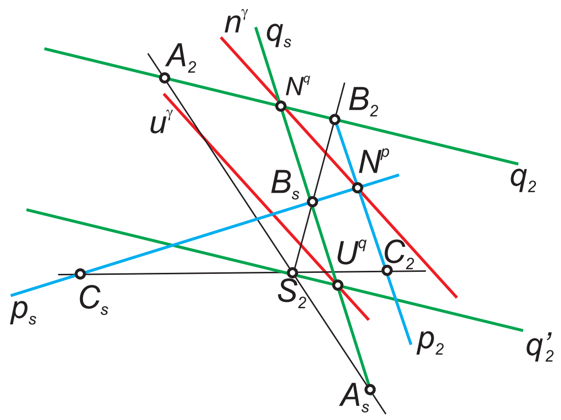
Příklad 1.5 Sestrojte stopu a úběžnici roviny γ určené body A, B, C. - obr. 1.14.

Řešení: (obr. 1.15)

1. Přímka p je určena body B, C ($p_s = B_sC_s, p_2 = B_2C_2$).
2. Přímka q je určena body A, B ($q_s = A_sB_s, q_2 = A_2B_2$).
3. Sestrojíme stopníky přímek p, q ($N^p = p_s \cap p_2$, $N^q = q_s \cap q_2$).
4. Sestrojíme úběžník přímky q ($q'_2 \parallel q_2$ a $S_2 \in q'_2$, $U^q = q'_2 \cap q_s$).
5. Stopa n^γ roviny γ je spojnicí stopníků N^p a N^q.



Obrázek 1.14:

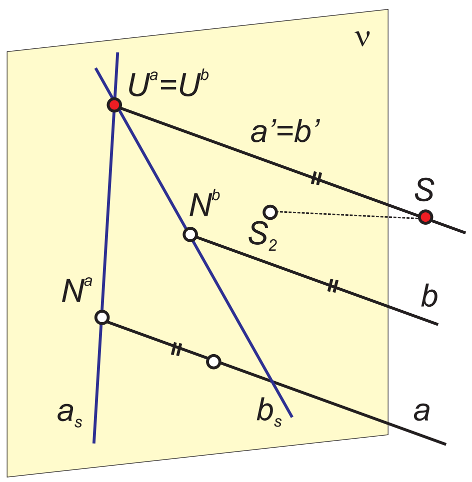


Obrázek 1.15:

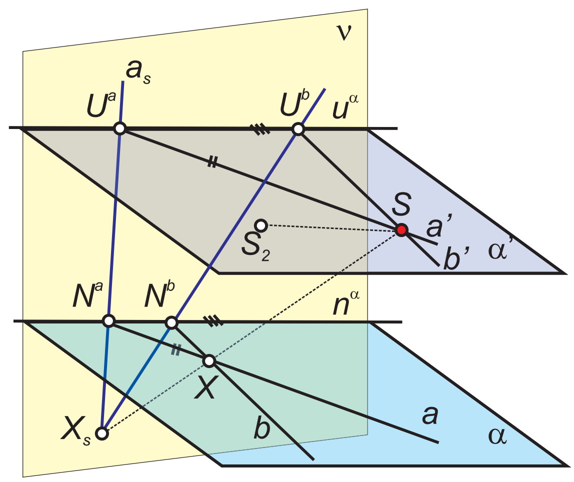
6. Úběžnice u^γ roviny γ prochází úběžníkem U^q a je rovnoběžná se stopou n^γ roviny γ. (Nemusíme tedy sestrojovat druhý úběžník).

□

1.1.4 Polohové úlohy



Obrázek 1.16:



Obrázek 1.17:

Pro řešení polohových úloh je vhodné připomenout a rozmyslet si některé skutečnosti:

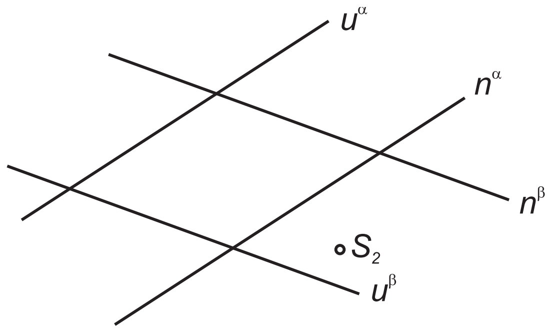
- Rovnoběžné přímky mají společný úběžník.
- Přímka je rovnoběžná s rovinou, právě když úběžník přímky leží na úběžnici roviny.
- Dvě přímky jsou různoběžné, právě když spojnice stopníků je rovnoběžná se spojnicí úběžníků. (Stopa roviny určená různoběžkami je rovnoběžná s úběžnicí této roviny.)
- Rovnoběžné roviny mají společnou úběžnici.

- Průsečnice rovin má stopník v průsečíku stop a úběžník v průsečíku úběžnic těchto rovin.

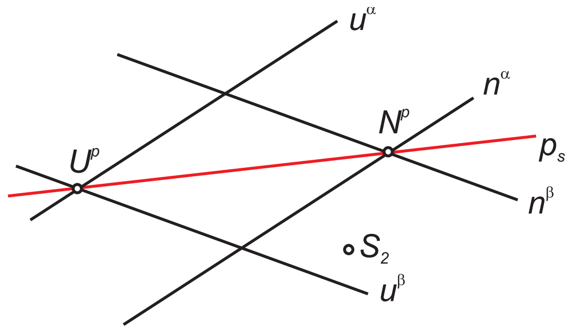
Příklad 1.6 Ve středovém promítání se středem S sestrojte průsečnici rovin $\alpha(n^\alpha, u^\alpha)$ a $\beta(n^\beta, u^\beta)$. - obr. 1.18.

Řešení: (obr. 1.19)

1. Úběžník U^p průsečnice p je průsečíkem úběžnic u^α a u^β obou rovin.
2. Stopník N^p průsečnice p je průsečíkem stop n^α a n^β obou rovin.
3. Středový průmět přímky p je určen stopníkem N^p a úběžníkem U^p.



Obrázek 1.18:



Obrázek 1.19:

□

Příklad 1.7 Ve středovém promítání se středem S sestrojte průsečík přímky $q(U^q, N^q)$ s rovinou $\rho(n^\rho, u^{rho})$. - obr. 1.20.

Řešení: (obr. 1.21)

1. Přímkou q vedeme libovolnou rovinu α $(N^q \in n^\alpha, U^q \in u^\alpha, n^\alpha \parallel u^\alpha)$.
2. Sestrojíme průsečnici r rovin α a ρ. Středový průmět přímky r je určen stopníkem N^r a úběžníkem U^r.
3. Průsečík R přímek r, q je zároveň průsečíkem přímky q s rovinou ρ $(R_s = r_s \cap q_s)$.

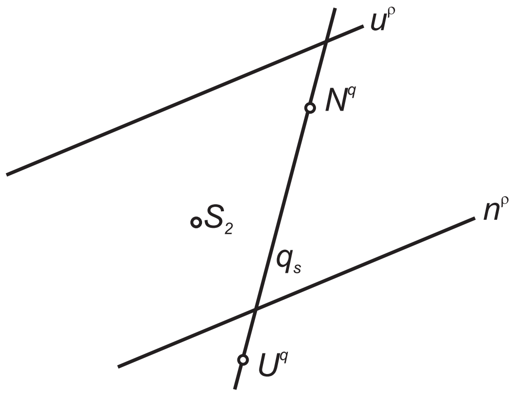
□

Příklad 1.8 Ve středovém promítání se středem S veďte bodem B rovinu $\sigma(n^\sigma, u^\sigma)$ rovnoběžnou s rovinou $\rho(n^\rho, u^\rho)$. - obr. 1.22.

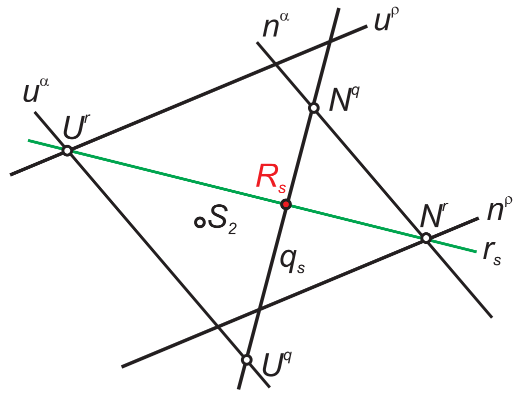
Řešení: (obr. 1.23)

1. Rovina σ je rovnoběžná s rovinou ρ, proto jejich úběžnice splývají $(u^\sigma = u^\rho)$.
2. Sestrojíme (libovolnou) přímku p procházející bodem B a rovnoběžnou s rovinou ρ $(B_s \in p_s)$.
3. Úběžník přímky p leží na úběžnici roviny σ $(U^p = p_s \cap u^\sigma)$.
4. Sestrojíme přímku $p'_2 = S_2U^p$ a přímku p_2 $(p_2 \parallel p'_2$ a $B_2 \in p_2)$.
5. Určíme stopník přímky p $(N^p = p_s \cap p_2)$.
6. Stopa n^σ hledané roviny σ prochází stopníkem N^p a je rovnoběžná se stopou n^ρ roviny ρ.

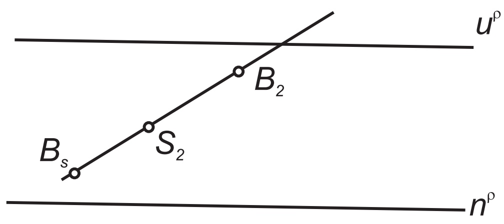
□



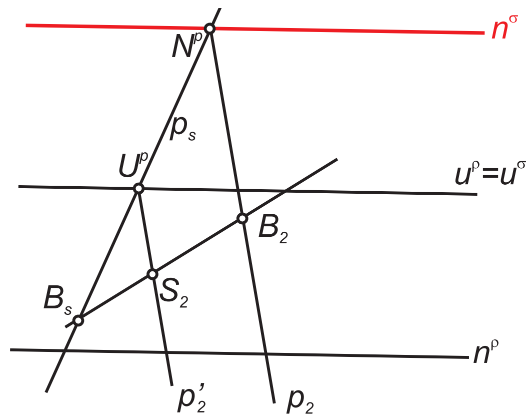
Obrázek 1.20:



Obrázek 1.21:



Obrázek 1.22:



Obrázek 1.23:

1.1.5 Metrické úlohy

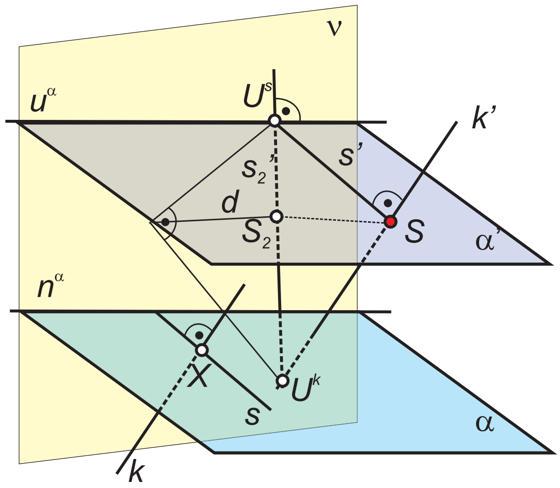
Přímka kolmá k rovině

Všechny přímky kolmé k dané α rovině mají společný úběžník (jsou navzájem rovnoběžné). Pro každou rovinu tedy můžeme sestrojit tzv. úběžník kolmic U^k. Tento úběžník je průsečík přímky k' ($k' \parallel k, S \in k'$) s průmětnou. Přímka k' je kolmá také k úběžnicové rovině α' a tedy ke její spádové přímce s' procházející středem promítání ($s' \in S$). Průsečík přímky s' s průmětnou označíme U^s (je to zároveň úběžník této přímky a leží na úběžnici roviny α). Pravoúhlé průměty s_2', k_2'(nárysy) přímek s', k' jsou kolmé ke stopě roviny a prochází bodem S_2. Úběžník U^s přímky s' leží v průsečíku přímek s_2' a u^α. Najdeme pravoúhlý trojúhelník U^sSU^k ve sklopení. Sklopíme bod S, sestrojíme sklopenou přímku (s') a sklopená přímka (k') je k ní kolmá. Přímka (k') protíná přímku k_2' v úběžníku kolmic U_k.

Příklad 1.9 Ve středovém promítání se středem S sestrojte kolmici bodem B k rovině $\rho(n^\rho, u^\rho)$. - obr. 1.25.

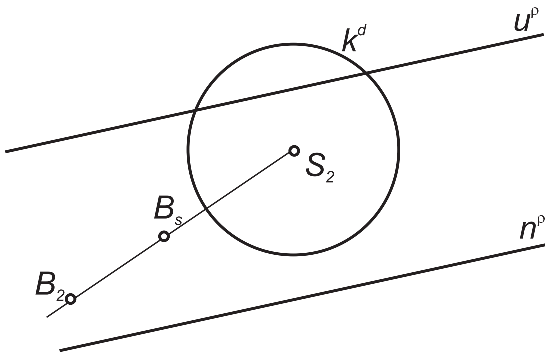
Řešení: (obr. 1.26)

1. Bodem S_2 vedeme nárys s_2' spádové přímky s', která prochází středem promítání a leží v rovině ρ' ($\rho' \parallel \rho, S \in \rho'$). Přímka s_2' prochází bodem S_2 a je kolmá k úběžnici u^ρ.

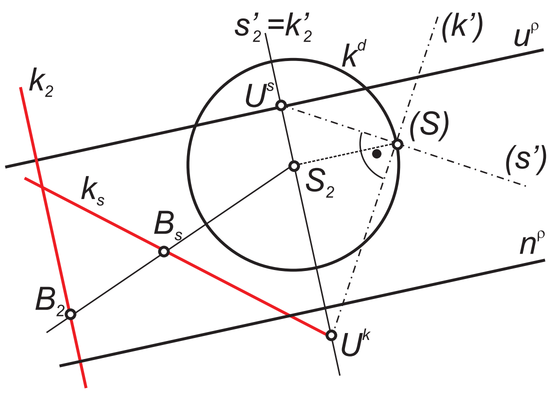


Obrázek 1.24:

2. Úběžník spádových přímek U^s leží v průsečíku úběžnice u^ρ a přímky s_2'.
3. Sklopíme promítací rovinu přímky s_2' (bod (S) leží na kolmici k s_2' procházející bodem S_2 a na distanční kružnici k^d, $U^s = (U^s)$.
4. Sklopená přímka (s') prochází body $(S), U^s$.
5. Sklopená kolmice (k') prochází bodem (S) a je kolmá k (s').
6. Úběžník kolmic U^k je průsečíkem přímek (k') a $s_2' = k_2'$.
7. Středový průmět k_s kolmice k prochází úběžníkem kolmic U^k a bodem B_s.
8. Pravoúhlý průmět k_2 kolmice k je kolmý na stopu roviny n^ρ a prochází bodem B_2.



Obrázek 1.25:



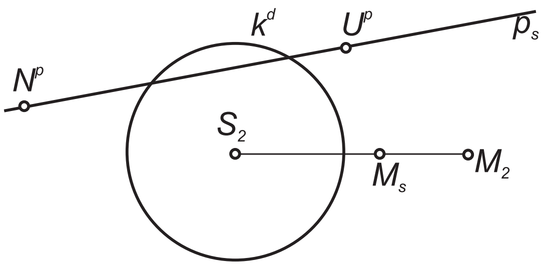
Obrázek 1.26:

□

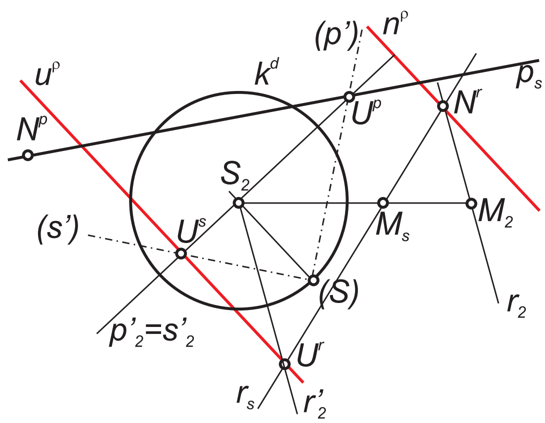
Příklad 1.10 Ve středovém promítání se středem S sestrojte bodem M rovinu kolmou k přímce p. - obr. 1.27.

Řešení: (obr. 1.28) Úloha je obrácená k úloze 1.1.5, úběžníkem kolmic je zde úběžník přímky p a hledáme úběžník spádových přímek roviny, kterým prochází úběžnice hledané roviny.

1. Přímka p_2' prochází body S_2 a U^p. Přímka s_2' (pravoúhlý průmět spádové přímky $s' \in \rho'$) splývá s přímkou p_2'.
2. Sestrojíme bod S ve sklopení($(S) \in k^d$) a přímku p' ve sklopení ($(p') = (S)U^p$).
3. Sklopená přímka (s') prochází bodem (S) a je kolmá k (p').
4. Průsečík U^s přímek s_2' a (s') je úběžníkem spádových přímek roviny ρ.
5. Úběžnice u^ρ prochází úběžníkem U^ρ a je kolmá k $p_2' = s_2'$.
6. Musíme najít jeden stopník libovolné přímky ležící v rovině ρ a procházející bodem M. Zvolíme libovolnou přímku r ($r \in \rho, M_s \in r_s, U^r \in u^\rho$). Přímka $r_2' = S_2U^r$ a $r_2 \parallel r_2'$ a $M_2 \in r_2$.
7. Stopník N^r přímky r je průsečíkem přímek r_2 a r_s.
8. Stopa n^ρ hledané roviny ρ prochází stopníkem N^r a je rovnoběžná s úběžnicí u^ρ roviny ρ.



Obrázek 1.27:



Obrázek 1.28:

□

Skutečná velikost úsečky

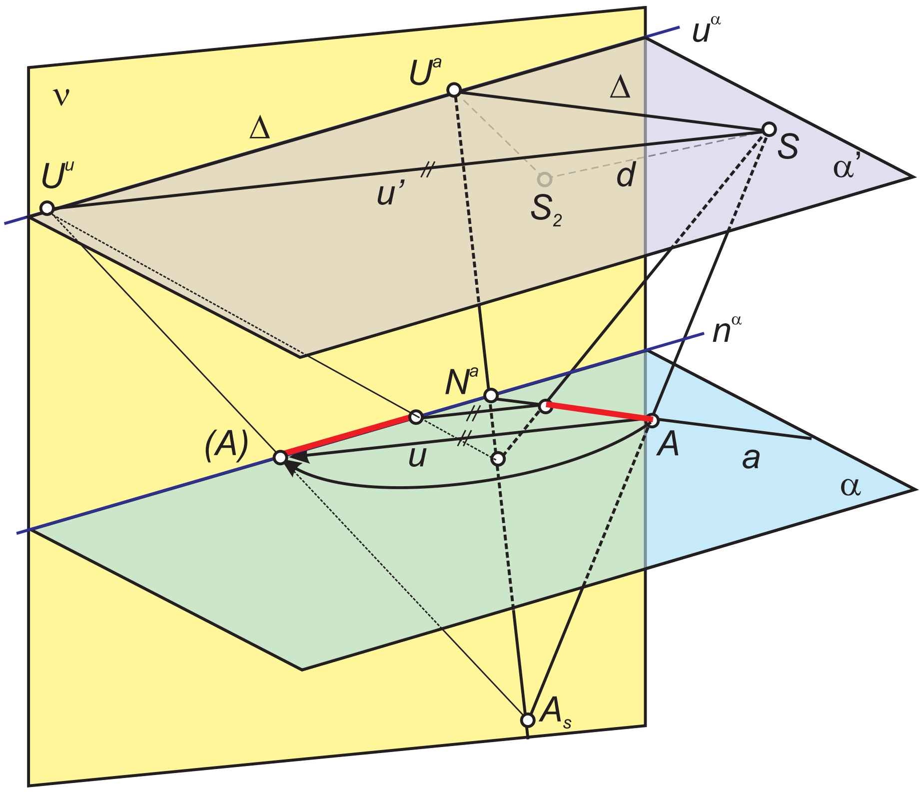
Hledáme skutečnou velikost úsečky ležící na přímce a. Přímkou proložíme libovolnou rovinu α. Úsečku otočíme do stopy n^α roviny α. Otočení odpovídá rovnoběžnému promítnutí, proto najdeme úběžník U^u promítacího paprsku u. Použitím úběžníku sestrojíme středový průmět promítacího paprsku A_sU^u, na kterém leží bod (A), tj. otočený bod A do stopy roviny α.

Příklad 1.11 Ve středovém promítání se středem S určete skutečnou délku úsečky $AB \in p$. - obr. 1.30.

Řešení: (obr. 1.31)

1. Zvolíme rovinu α tak, aby $p \in \alpha$ ($U^p \in u^\alpha$ a $N^p \in n^\alpha$).
2. Sestrojíme úběžník promítacích paprsků $U^u \in u^\alpha$:

   - Sklopíme trojúhelník SS_2U^p, ve sklopení mu odpovídá trojúhelník $(S)S_2U^p$ s pravým úhlem při vrcholu S_2, velikost strany $S_2(S) = d$.
   - Vzdálenost $\Delta = (S)U^p$ je rovna skutečné vzdálenosti úběžníků U^p a U^u.



Obrázek 1.29:

3. Z úběžníku světelných paprsků U^u promítneme body A_s, B_s na stopu n^α, získáme body $[A], [B] \in n^\alpha$.
4. Vzdálenost bodů $[A], [B]$ je skutečnou velikostí úsečky AB.

$\square$

Příklad 1.12 Ve středovém promítání se středem S naneste na přímku p od bodu V délku a - obr. 1.32.

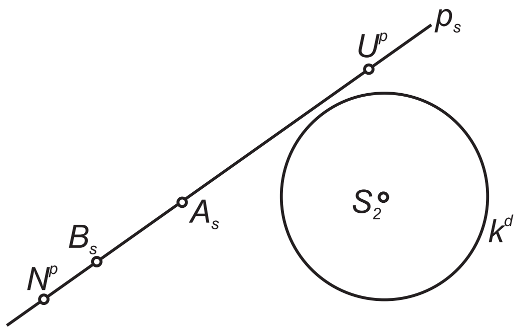
Řešení: (obr. 1.33) Úloha je obrácená k úloze předchozí, sestrojíme úběžník světelných paprsků U^u, promítneme bod V na stopu roviny, naneseme úsečku délky a a promítneme získaný bod zpět na přímku p.

1. Zvolíme rovinu α tak, aby $p \in \alpha$ ($U^p \in u^\alpha$ a $N^p \in n^\alpha$).
2. Sestrojíme úběžník promítacích paprsků $U^u \in u^\alpha$:

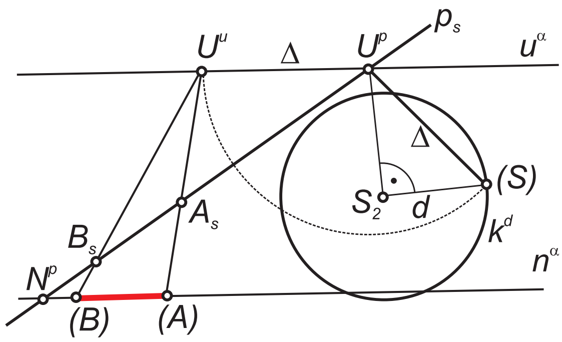
   (a) Sklopíme trojúhelník SS_2U^p, ve sklopení mu odpovídá trojúhelník $(S)S_2U^p$ s pravým úhlem při vrcholu S_2, velikost strany $S_2(S) = d$.

   (b) Vzdálenost $\Delta = (S)U^p$ je rovna skutečné vzdálenosti úběžníků U^p a U^u.

3. Z úběžníku světelných paprsků U^u promítneme bod V_s na stopu n^α, získáme bod $[V] \in n^\alpha$.
4. Na stopu n^α naneseme zadanou vzdálenost a, získaný bod označíme $[W]$ a promítneme jej z bodu U^u zpět na přímku p_s.

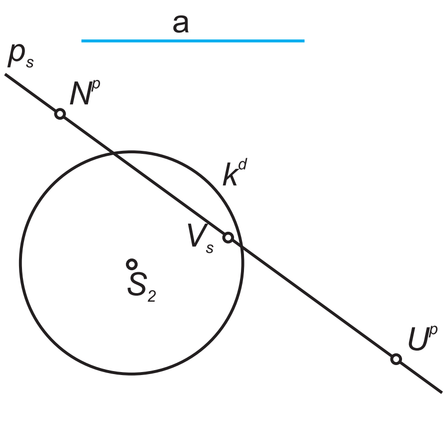


Obrázek 1.30:

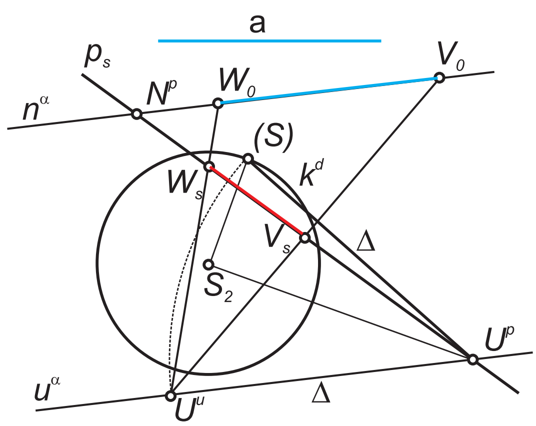


Obrázek 1.31:

5. Promítnutím jsme získali bod W_s, který je středovým průmětem bodu W ležícího na přímce p a velikost úsečky VW je a.



Obrázek 1.32:



Obrázek 1.33:

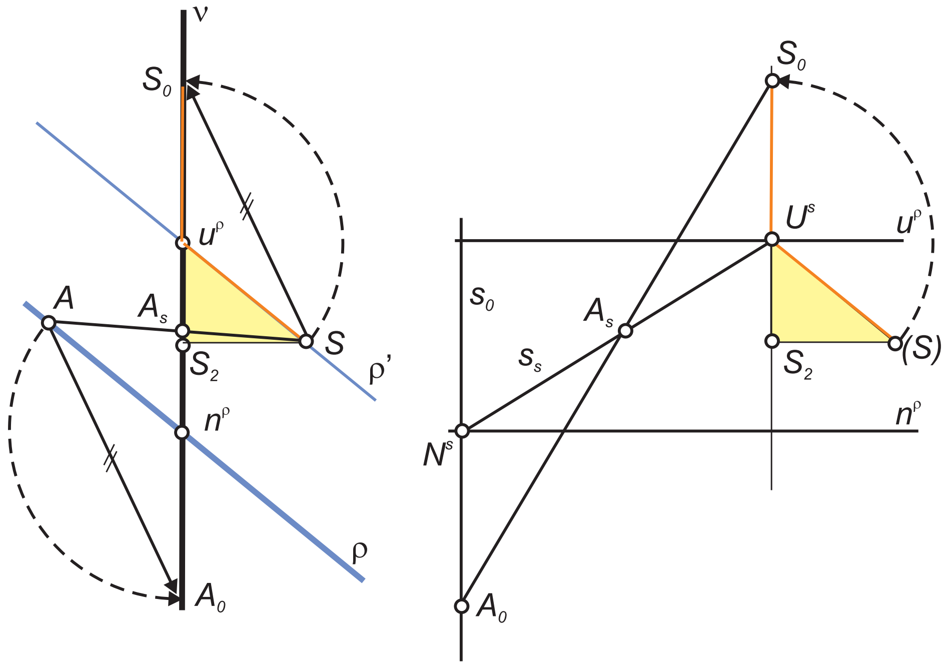
□

Otáčení

Stejně jako v dalších projekcích i zde řešíme některé rovinné úlohy otočením příslušné roviny do průmětny (viz obrázek 1.34).

Otočíme rovinu ρ kolem stopy do průmětny. Otočení můžeme nahradit rovnoběžným promítnutím (bodu bodů roviny ρ do průmětny). Promítnutí bodu S odpovídá otočení úběžnicové roviny kolem úběžnice do průmětny.

Otočíme bod S (v úběžnicové rovině kolem úběžnice), rovina otáčení je kolmá k úběžnici, střed otáčení je úběžník spádových přímek a poloměr otáčení je přepona pravoúhlého trojúhelníka jehož odvěsnami jsou úsečky S_2U^s a S_2S (přeponu sestrojíme sklopením tohoto trojúhelníka do průmětny, bodu S odpovídá ve sklopení bod (S)), otočený bod označíme S_0 - viz obrázek 1.34. Otočený bod A (A_0) nalezneme takto: Bodem A vedeme spádovou přímku (prochází A_s a U^s), její stopník leží na stopě roviny, otočená spádová přímka prochází stopníkem a je kolmá



Obrázek 1.34:

ke stopě. Bod A_0 leží na otočené spádové přímce a na přímce procházející bodem S_0 (otočený bod S) a bodem A_s.

Mezi středovým průmětem a otočeným objektem platí vztah středové kolineace jejíž osou je stopa n^ρ roviny ρ, středem je otočený střed S_0 a párem odpovídajících si bodů body A_s a A_0.

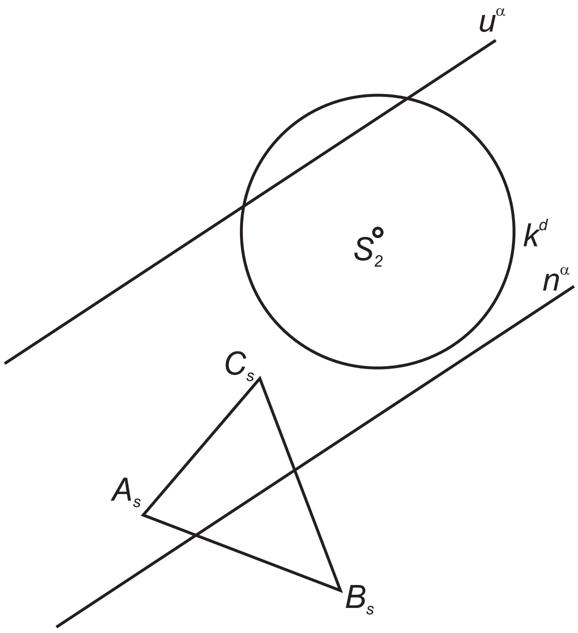
Příklad 1.13 Ve středovém promítání se středem S určete skutečnou velikost trojúhelníka ABC ležícího v rovině $\alpha(n^\alpha, u^\alpha)$. - obr. 1.35.

Řešení: (obr. 1.36) Rovinu trojúhelníka otočíme do průmětny.

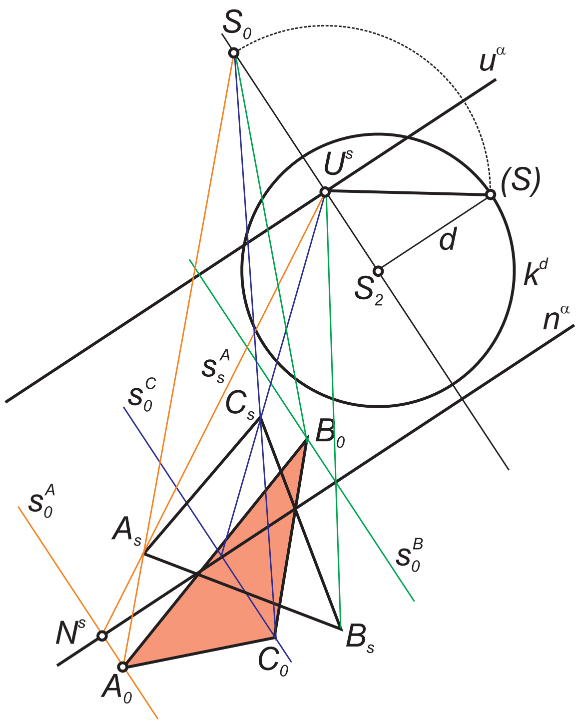
1. Sestrojíme bod S v otočení:
   (a) Určíme úběžník spádových přímek U^s (leží v průsečíku kolmice vedené bodem S_2 ke stopě a úběžnice u^α).
   (b) Sestrojíme bod S v otočení (středem otáčení je bod U^s, poloměrem je velikost úsečky $U^s(S)$), otočený bod S_0 leží na kolmici vedené bodem S_2 k u^α (průmět roviny otáčení).
2. Bod A v otočení najdeme takto:
   (a) Bodem A vedeme spádovou přímku s_s^A (prochází A_s a U^s).
   (b) Stopník spádové přímky leží na stopě roviny, otočená spádová přímka s_0^A prochází stopníkem a je kolmá ke stopě n^α.

(c) Bod A_0 leží na otočené spádové přímce s_0^A a na přímce procházející bodem S_0 (otočený bod S) a bodem A_s.

3. Mezi otočeným objektem a jeho středovým průmětem platí vztah středové kolineace jejíž osou je stopa n^ρ roviny ρ, středem je otočený střed S_0 a párem odpovídajících si bodů body A_s a A_0.
4. Pomocí této kolineace sestrojíme body B, C v otočení (otočené body označíme B_0, C_0).
5. Trojúhelník A_0, B_0, C_0 je otočený obraz trojúhelníka ABC tj. trojúhelník ABC ve skutečné velikosti.



Obrázek 1.35:



Obrázek 1.36:

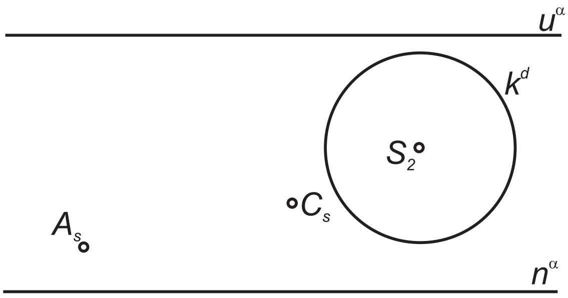
□

Příklad 1.14 Ve středovém promítání se středem S sestrojte čtverec $ABCD$, ležící v rovině α jestliže znáte středový průmět úhlopříčky AC. - obr. 1.37.

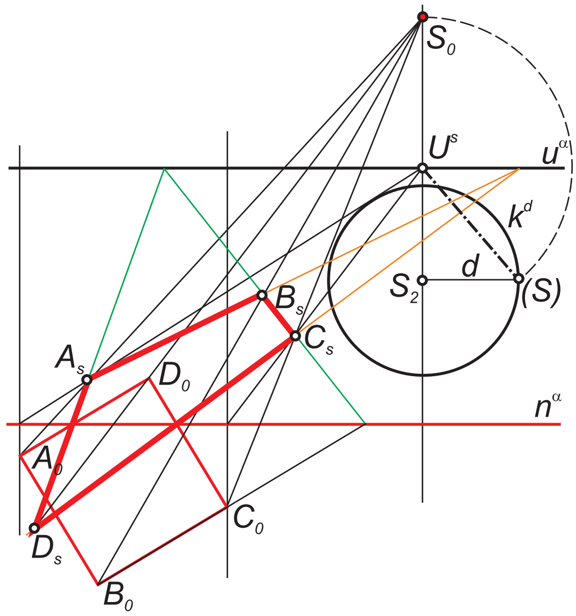
Řešení: (obr. 1.38) Otočíme rovinu α do průmětny, v otočení sestrojíme čtverec ve skutečné velikosti a jeho vrcholy otočíme pomocí kolineace zpět.

1. Sestrojíme bod S v otočení (viz. příklad 1.13), otočený bod označíme S_0.
2. Sestrojíme bod A v otočení (viz. příklad 1.13), otočený bod označíme A_0.
3. Pomocí této kolineace (jejíž osou je stopa roviny n^ρ, středem je otočený střed S_0 a párem odpovídajících si bodů body A_s a A_0) sestrojíme bod C v otočení (otočený bod označíme C_0).
4. V otočení sestrojíme čtverec $A_0B_0C_0D_0$ s úhlopříčkou A_0C_0.

5. Pomocí kolineace tento čtverec otočíme zpět, získáme čtverec $ABCD$ ve středovém promítání.
6. Obrazem čtverce je čtyřúhelník $A_sB_sC_sD_s$, jehož protější strany se protínají na úběžnici roviny α.



Obrázek 1.37:



Obrázek 1.38:

□

Příklad 1.15 Ve středovém promítání se středem S sestrojte krychli s podstavou v rovině α a na ní umístěte pravidelný čtyřboký jehlan tak, aby vrcholy podstavy splývaly s vrcholy horní podstavy krychle. Znáte středový průmět úhlopříčky AC, velikost výšky jehlanu je shodná s velikostí strany krychle. - obr. 1.39.

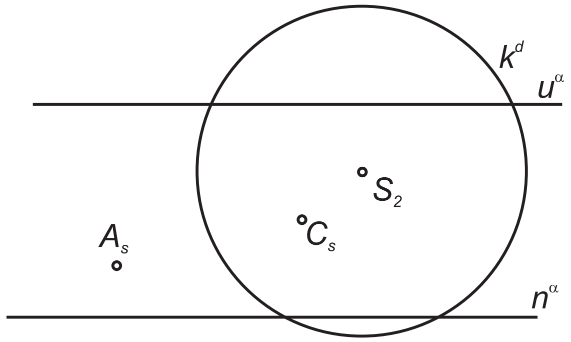
Řešení: Úlohu překreslete na větší formát (A4) a vypracujte jako domácí cvičení. Návod: při řešení využijte poznatky z úloh (podstava krychle), (kolmé hrany) a (nanesení výšky).

□

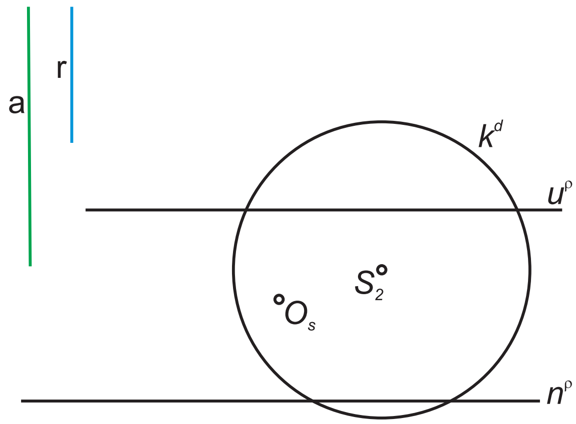
Obraz kružnice

Středovým průmětem kružnice je kuželosečka, v níž průmětna protíná promítací kuželovou plochu kružnice (kuželová plocha jejímž vrcholem je střed promítání a řídící křivkou zobrazovaná kružnice). Typ kuželosečky závisí na poloze kružnice vzhledem k distanční rovině:
pokud kružnice neprotíná distanční rovinu (nemá s ní žádný společný bod), pak je obrazem elipsa, jestliže kružnice protíná distanční rovinu, pak je obrazem hyperbola a jestliže se kružnice dotýká distanční roviny (má s ní jeden společný bod), pak je obrazem kružnice parabola.

Postup při sestrojování obrazu kružnice vidíme na obrázku 1.41: sestrojíme otočený střed promítání a otočený střed kružnice (viz příklad 1.13), v otočení sestrojíme kružnici a v kolineaci najdeme její obraz (viz předmět Deg1). Podrobněji je tento postup popsán v následující úloze, kde sestrojujeme rotační kužel a kružnice je jeho podstavou.



Obrázek 1.39:



Obrázek 1.40:

Příklad 1.16 Ve středovém promítání se středem S sestrojte rotační kužel s podstavou v rovině ρ. Je dán střed podstavy O v rovině ρ, poloměr podstavy je r a výška kužele a. - obr. 1.40.

Řešení: (obr. 1.42) Sestrojíme podstavu kužele (obraz kružnice ve středovém promítání), bodem O vedeme kolmici k rovině ρ a na kolmici naneseme od bodu O výšku a.

1. Sestrojíme bod S v otočení (viz. příklad 1.13), otočený bod označíme S_0.
2. Sestrojíme bod O v otočení (viz. příklad 1.13), otočený bod označíme O_0.
3. V otočení sestrojíme kružnici m_0 se středem O_0 a poloměrem r.
4. Sestrojíme obraz kružnice m v kolineaci určené středem kolineace S_0, osou n^ρ a párem odpovídajících si bodů O_s, O_0:

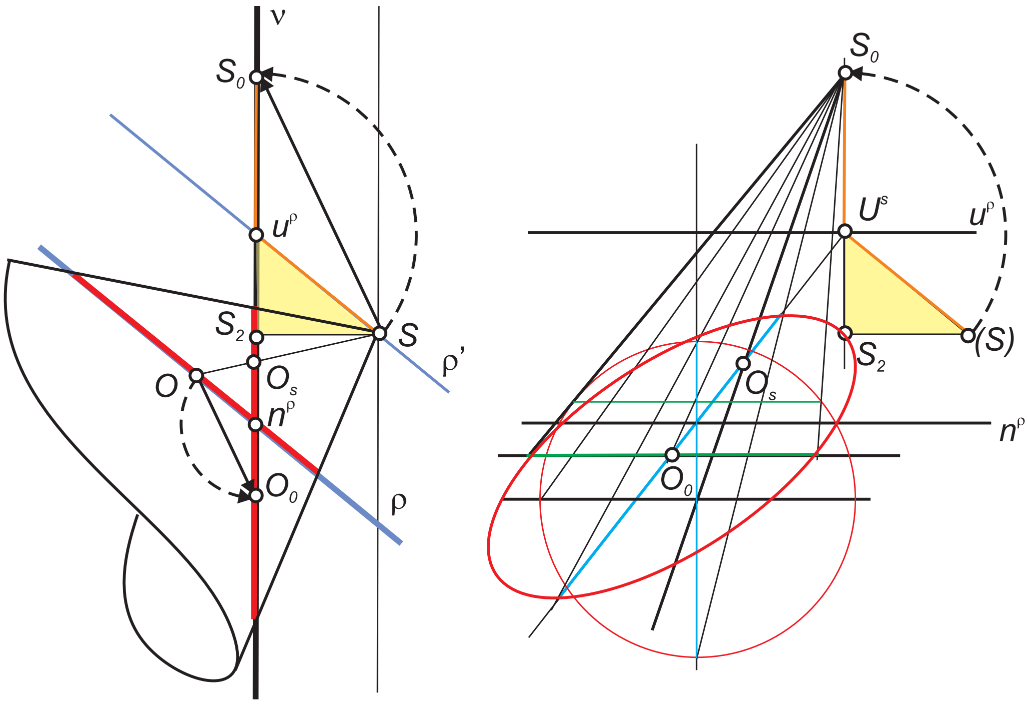
   (a) ...

5. Sestrojíme úběžník kolmic U^k (postup je stejný jako v příkladě 1.1.5, pro lepší přehlednost nejsou na obrázku označeny všechny použité přímky):

   (a) Bodem S_2 vedeme nárys s'_2 spádové přímky s', která prochází středem promítání a leží v rovině ($\rho' \parallel \rho, S \in \rho'$). Přímka s'_2 prochází bodem S_2 a je kolmá k úběžnici u^ρ.

   (b) Úběžník spádových přímek U^s leží v průsečíku úběžnice u^ρ a přímky s'_2.

   (c) Sklopíme promítací rovinu přímky s'_2 (bod (S) leží na kolmici k s'_2 procházející bodem S_2 a na distanční kružnici k^d, $U^s = (U^s)$.



Obrázek 1.41:

(d) Sklopená přímka (s') prochází body $(S), U^s$.

(e) Sklopená kolmice (k') prochází bodem (S) a a je kolmá k (s').

(f) Úběžník kolmic U^k je průsečíkem přímek (k') a $s_2' = k_2'$.

6. Obraz přímky k, která prochází bodem O a je kolmá k rovině ρ prochází bodem O_s a úběžníkem kolmic U^k. Přímka k_2 prochází stopníkem $N \in n^\alpha$ a je kolmá k n^α.
7. Určíme stopník N^k přímky k (průsečík přímek k_2, k_s).
8. Na přímku k naneseme od bodu O vzdálenost a (postup je stejný jako v příkladě 1.1.5, pro lepší přehlednost nejsou na obrázku označeny všechny použité přímky):

(a) Zvolíme rovinu α tak, aby $k \in \alpha$ ($U^k \in u^\alpha$ a $N^k \in n^\alpha$) - volíme $n^\alpha \perp n^\rho$.

(b) Sestrojíme úběžník promítacích paprsků $U^u \in u^\alpha$:

i. Sklopíme trojúhelník SS_2U^k, ve sklopení mu odpovídá trojúhelník $(S)S_2U^k$ s pravým úhlem při vrcholu S_2, velikost strany $S_2(S) = d$.

ii. Vzdálenost $\Delta = (S)U^k$ je rovna skutečné vzdálenosti úběžníků U^k a U^u.

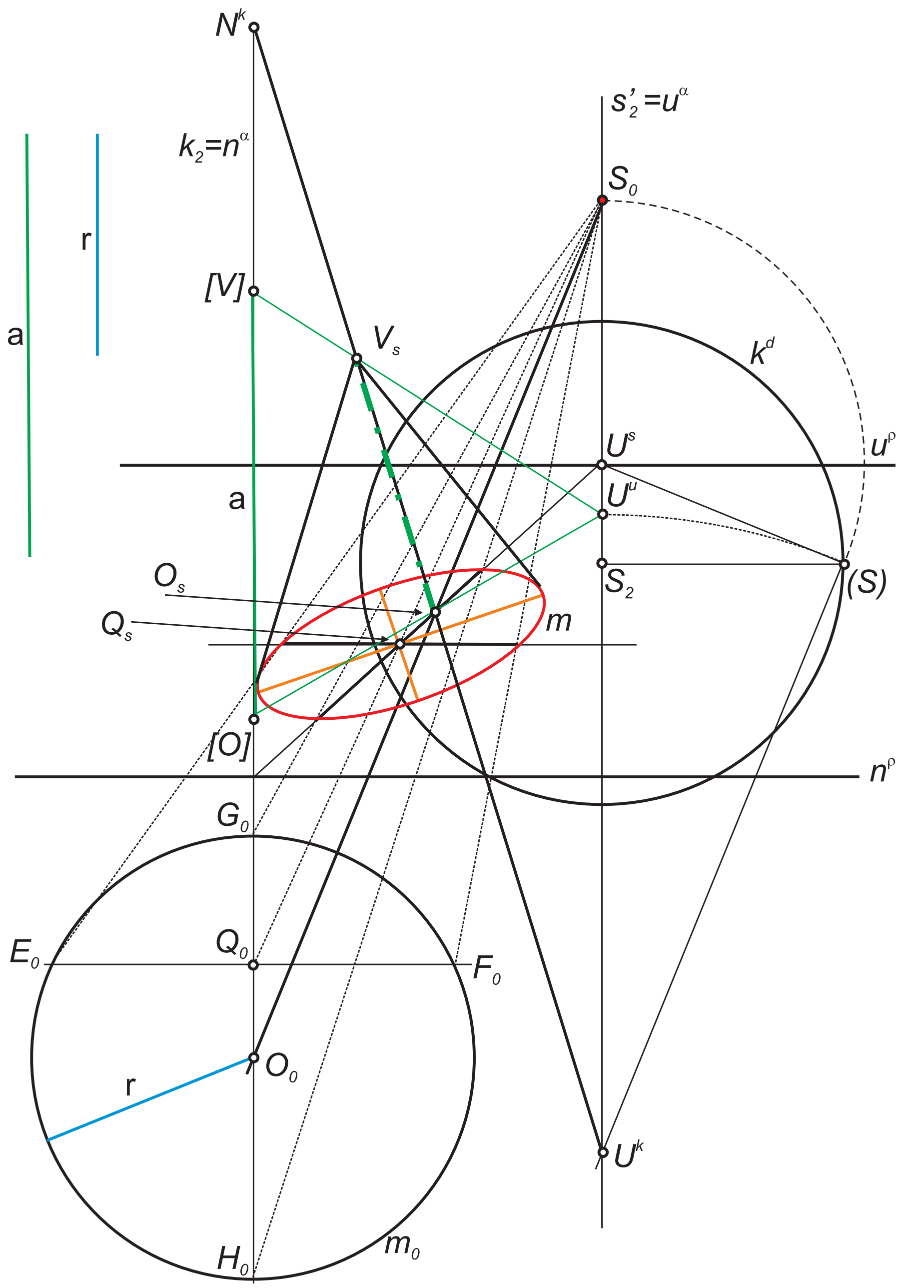
(c) Z úběžníku světelných paprsků U^u promítneme bod O na stopu n^α, získáme bod $[O] \in n^\alpha$.

(d) Na stopu n^α naneseme zadanou vzdálenost a, získaný bod označíme $[V]$, který promítneme z bodu U^u zpět na přímku k_s.

(e) Promítnutím jsme získali bod V_s, který je středovým průmětem bodu V ležícího na přímce k a velikost úsečky VW je a.

9. Obrysové površky kužele sestrojíme tak, že z bodu V_s vedeme k obrazu podstavy tečny.

$\square$


N^k
$k_2=n^\alpha$
$s'_2=u^\alpha$
S_0
r
a
$[V]$
V_s
k^d
U^s
u^ρ
U^u
a
O_s
S_2
(S)
Q_s
m
$[O]$
n^ρ
G_0
E_0
Q_0
F_0
O_0
r
U^k
H_0
m_0

Obrázek 1.42:

Literatura

[1] Bohne, E. – Klix, W.D.: Geometrie – Grundlagen für Anwendungen. Leipzig, Fachbuchverlag 1995.

[2] Ježek, F. – Míková, M.: Maticová algebra a analytická geometrie. Plzeň, ZČU 2003.

[3] Rogers, D.F. – Adams, J.A.: Mathematical Elements for Computer Graphics. New York, Mc Graw–Hill 1990.

[4] Urban, A.: Deskriptivní geometrie I. Praha, SNTL 1965.

[5] Urban, A.: Deskriptivní geometrie II. Praha, SNTL 1967.